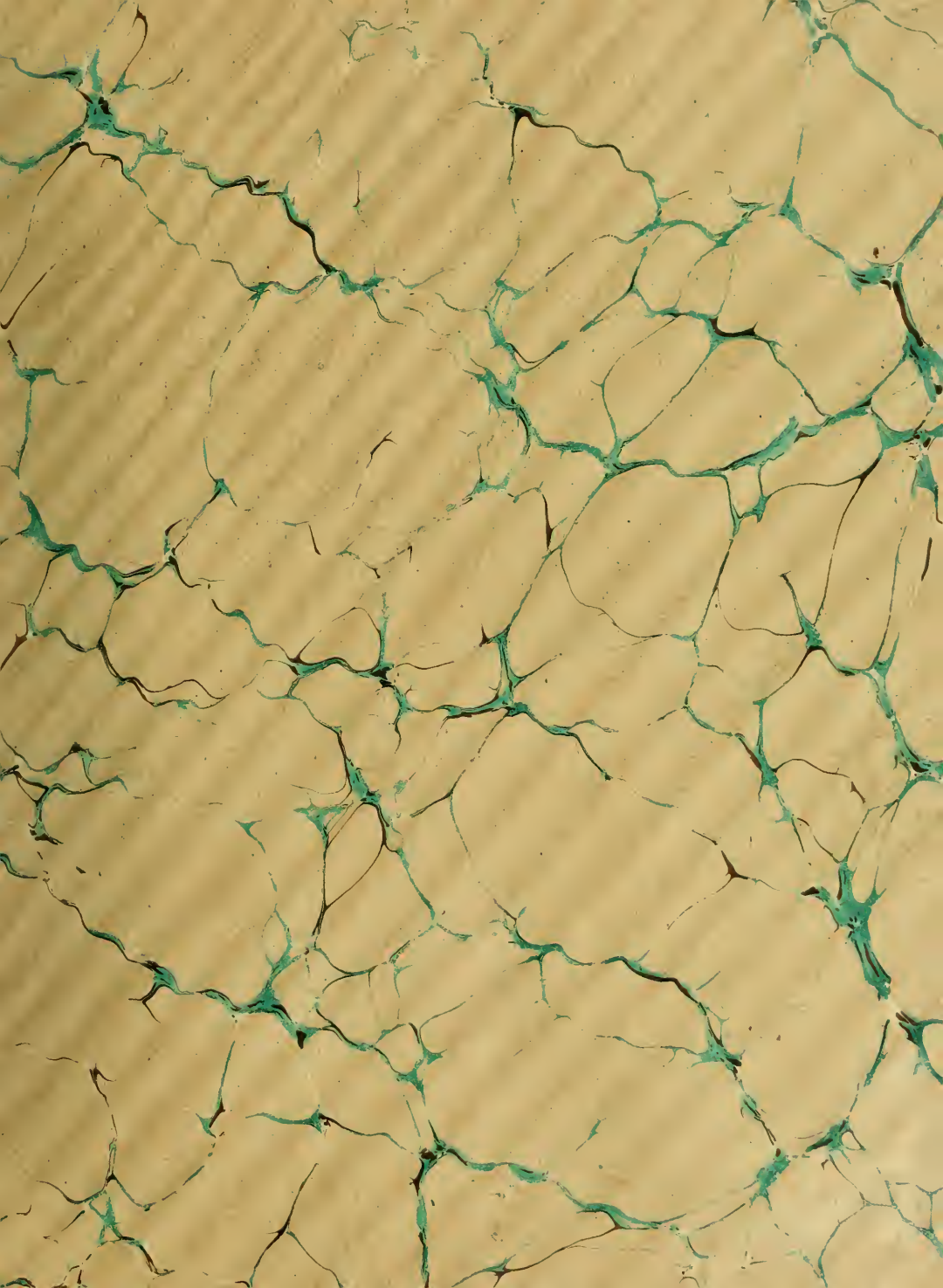


Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s3journaldemat09liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΜΕΤ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

TROISIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
ADJOINT AU COMITÉ D'ARTILLERIE,

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS SAVANTS.

TOME NEUVIÈME. — ANNÉE 1883.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

1883

Tous droits réservés.

GN
J604
Ser. 3
t. 9

20804
e.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce (¹);

PAR M. APPELL.

I. Soit

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une courbe algébrique d'ordre m et de genre p; on peut toujours supposer, comme il est connu, que cette équation contient un terme en y^m, et que le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers m valeurs distinctes quand x croît indéfiniment.

Les fonctions que je considère dans ce Mémoire, comme analogues des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, sont des

(¹) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances du 18 avril 1881 et du 23 octobre 1882.

fonctions du point analytique (x, y) qui n'ont sur toute la sphère que des pôles et des points critiques algébriques, à savoir les points critiques de la fonction y de x; de plus, ces fonctions se reproduisent, multipliées par un facteur constant, quand le point (x, y) décrit un cycle quelconque. Je me propose de démontrer ici quelques-unes des propriétés fondamentales de ces fonctions et, en particulier, d'indiquer un mode de décomposition en éléments simples analogue à celui que M. Hermite a donné pour les fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

2. Nous dirons avec Riemann (*Werke, Theorie der Abelschen Functionen*, p. 96, § 2) qu'une fonction du point analytique (x, y) qui s'annule en un point (ξ, η) est, dans le voisinage de ce point, infiniment petite du premier ordre :

1° Si le point (ξ, η) est un point ordinaire de $F = 0$, lorsque cette fonction devient infiniment petite, comme $(x - \xi)$;

2° Si le point (ξ, η) est un point critique dans le voisinage duquel y appartient à un système circulaire de r racines, lorsque cette fonction devient infiniment petite, comme $(x - \xi)^{\frac{1}{r}}$.

Une fonction est dite *infiniment petite d'ordre n en un point*, lorsqu'elle devient en ce point infiniment petite, comme la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une fonction infiniment petite du premier ordre.

Enfin une fonction est dite *infinie d'ordre n en un point* lorsque son inverse est infiniment petite d'ordre n.

Dans ces définitions $x - \xi$ doit être remplacé par $\frac{1}{x}$ quand $\xi = \infty$.

3. Désignons par

$$u^{(1)}(x, y),\ u^{(2)}(x, y),\ \ldots,\ u^{(p)}(x, y)$$

les intégrales abéliennes normales de première espèce relatives à la courbe $F = 0$, et par

$$\Omega_1^{(i)} = 0, \quad \Omega_3^{(i)} = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_{2i-1}^{(i)} = 2\pi\sqrt{-1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p-1}^{(i)} = 0,$$

$$\Omega_2^{(i)} = 2\alpha_{i1}, \quad \Omega_4^{(i)} = 2\alpha_{i2}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2i}^{(i)} = 2\alpha_{ii}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}^{(i)} = 2\alpha_{ip}$$

les $2p$ périodes normales de l'intégrale $u^{(i)}(x, y)$. Lorsque le point (x, y) décrit le cycle correspondant à la période $\Omega_k^{(i)}$, l'une des fonctions $\Phi(x, y)$ que nous considérons se reproduit multipliée par un *facteur* ou *multiplicateur* $\mu_k (k = 1, 2, \ldots, 2p)$. Il y a donc $2p$ multiplicateurs μ_k correspondant respectivement aux $2p$ cycles qui donnent les périodes normales.

Soit $\Theta(u_i)$ la fonction Θ de p variables formée avec les périodes normales (Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 114). On a déjà une première expression de la fonction $\Phi(x, y)$ en prenant

$$(2) \qquad \Phi(x, y) = e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - k_i - g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - k_i]} \mathrm{R}(x, y),$$

$\mathrm{R}(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de x et y, λ_i, g_i et k_i des constantes. Les p constantes k_i sont arbitraires; les $2p$ constantes λ_i et g_i sont déterminées par les équations suivantes, qui expriment que la fonction Φ possède $2p$ multiplicateurs donnés μ_k:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu_{2i-1} &= e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_i} \\ \mu_{2i} &= e^{2(\lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \ldots + \lambda_p a_{pi}) + g_i} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots p).$$

Ces équations donnent toujours un système de valeurs pour ces constantes; les λ_i sont déterminés à des entiers près et les g_i à des multiples près de périodes conjuguées.

Cette forme (2) est analogue à la forme

$$e^{\lambda u} \frac{\mathrm{H}(u - k - g)}{\mathrm{H}(u - k)} \varphi(u),$$

sous laquelle peut se mettre une fonction doublement périodique de seconde espèce, $\varphi(u)$ désignant une fonction doublement périodique et λ, k, g des constantes.

4. Soient maintenant

$$(\xi, \eta), \ (x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_{p-1}, y_{p-1})$$

p points de la courbe $F = 0$. On sait que la fonction

$$\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) + C_i\right]$$

devient en chacun de ces p points infiniment petite du premier ordre (Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 145). Si l'on fait, pour simplifier,

$$h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k), \tag{4}$$

la fonction

$$\begin{bmatrix} \xi', \eta' \\ \xi, \eta \end{bmatrix} = \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi', \eta') + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]} \tag{5}$$

devient infiniment petite du premier ordre au seul point (ξ', η') et infinie du premier ordre au seul point (ξ, η).

On voit facilement que toute fonction $\Phi(x, y)$ de l'espèce de celles que nous considérons peut se mettre sous la forme

$$\Phi(x, y) = A \prod_{k=1}^{k=n} \begin{bmatrix} \xi'_k, \eta'_k \\ \xi_k, \eta_k \end{bmatrix} e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)}, \tag{6}$$

où les zéros et les infinis de la fonction sont en évidence. Cette forme (6) est analogue à la forme

$$A e^{\lambda u} \prod_{k=1}^{k=n} \frac{H(u - a'_k)}{H(u - a_k)}$$

des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

5. Occupons-nous maintenant de la décomposition de la fonction $\Phi(x, y)$ en éléments simples, et *écartons* d'abord le cas *exceptionnel* où, dans la forme (2), les constantes g_i seraient nulles à des multiples près de périodes conjuguées, c'est-à-dire où les $2p$ multiplicateurs μ_k

sont de la forme

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu_{2i-1} &= e^{2\pi\sqrt{-1}\,\lambda_i} \\ \mu_{2i} &= e^{2(\lambda_1\alpha_{1i}+\lambda_2\alpha_{2i}+\ldots+\lambda_p\alpha_{pi})} \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, \ldots, p).$$

Ce cas exceptionnel est analogue à celui qui se présente déjà pour les fonctions doublement périodiques de seconde espèce et qui a été signalé d'abord par M. Fuchs (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. IV, p. 132, § 6) et étudié d'une façon plus approfondie par M. Mittag-Leffler (*Comptes rendus*, t. XC, p. 177).

Ce cas étant pour le moment écarté, l'élément de la décomposition est la fonction

$$(8)\quad \mathcal{F}(x, y; \xi, \eta) = \mathrm{K}\, e^{\sum\limits_{i=1}^{=p} \lambda_i u^{(i)}(x,y)} \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i - g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]},$$

où les constantes λ_i et g_i sont déterminées par les équations (3) et où h_i désigne la quantité (4). Cette fonction $\mathcal{F}$ admet les mêmes multiplicateurs que la fonction Φ à décomposer; elle devient infinie du premier ordre au plus aux p points

$$(\xi, \eta),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_{p-1}, y_{p-1}).$$

De ces p points, je considère les $(p-1)$ derniers

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_{p-1}, y_{p-1})$$

comme *entièrement arbitraires*, le premier seul (ξ, η) devant recevoir par la suite des valeurs numériques déterminées.

Il importe tout d'abord de montrer que, dans ces conditions, le numérateur de $\mathcal{F}$ ne peut pas admettre le zéro (ξ, η) et que, par conséquent, cette fonction devient effectivement infinie au point (ξ, η). On démontre cette proposition en remarquant que, si le numérateur de $\mathcal{F}$ s'annulait pour $(x, y) = (\xi, \eta)$, on aurait

$$h_i - g_i = \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k, y'_k) - \mathrm{C}_i \quad (i = 1, \ldots, p),$$

les $p-1$ points (x'_k, y'_k) étant convenablement choisis. Or, en remplaçant h_i par sa valeur (4), on obtient ainsi les p équations

$$(9)\qquad \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k, y'_k) + u^{(i)}(x_k, y_k) = 2C_i - g_i \quad (i = 1, 2, \ldots p).$$

Mais, comme les $(p-1)$ points (x_k, y_k) sont *arbitraires*, ces relations (9) ne peuvent avoir lieu que si les g_i sont nulles à des multiples près des périodes; car, autrement, ces relations détermineraient un des points (x_k, y_k) en fonction des $(p-2)$ autres, ce qui est absurde. On aurait, par exemple,

$$u^{(i)}(x_1, y_1) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k, y'_k) = 2C_i - g_i - \sum_{k=2}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k),$$

équations qui déterminent les p points

$$(x_1, y_1),\ (x'_1, y'_1),\ \ldots,\ (x'_{p-1}, y'_{p-1}),$$

à moins que les seconds membres n'aient une forme particulière pour laquelle il y a indétermination, et cette forme particulière exige précisément

$$g_i = 0$$

(*voir* Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 96, § 56). Or, ce cas de $g_i = 0$ est le cas exceptionnel que nous avons écarté.

La constante K, qui figure dans l'expression (8) de $\bar{\pi}$, se détermine par les considérations suivantes. Supposant d'abord que le point (ξ, η) est un point ordinaire de la courbe $F = 0$, on détermine K de façon que l'une des déterminations de $\bar{\pi}(x, y; \xi, \eta)$, obtenue en faisant arriver le point (x, y) dans le voisinage de (ξ, η), suivant un chemin déterminé, soit de la forme

$$(10)\qquad \frac{1}{x-\xi} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-\xi)^\nu,$$

les a_ν étant indépendants de x. Si, au contraire, le point (ξ, η) coïncide

avec un point critique dans le voisinage duquel y appartient à un système circulaire de r racines, on détermine K, de façon que l'une des déterminations de $\mathcal{F}$ soit, dans le voisinage du point (ξ, η), de la forme

$$(11) \qquad \frac{1}{(x-\xi)^{\frac{1}{r}}} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu (x-\xi)^{\frac{\nu}{r}}.$$

Cela posé, supposons que la fonction $\Phi(x, y)$ à décomposer ait n infinis simples

$$(\xi_1, \eta_1), \ (\xi_2, \eta_2), \ \ldots, \ (\xi_n, \eta_n),$$

et appelons A_i le coefficient de $\frac{1}{x-\xi_i}$, ou de $\frac{1}{(x-\xi_i)^{\frac{1}{r}}}$ dans le développement d'une des déterminations de Φ dans le voisinage du point (ξ_i, η_i), cette détermination étant précisément celle que l'on obtient en faisant suivre au point (x, y) le chemin qui fournit en (ξ_i, η_i) la détermination (10) ou (11) de $\mathcal{F}(x, y; \xi_i, \eta_i)$. On a alors la formule suivante :

$$(12) \qquad \Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \mathcal{F}(x, y; \xi_i, \eta_i).$$

Lorsque q des points (ξ_i, η_i) coïncident en un point qui devient un infini d'ordre q, les q termes correspondants dans cette formule (12) doivent être remplacés par l'un d'eux et ses $(q-1)$ premières dérivées par rapport au paramètre (ξ, η).

6. Pour démontrer la formule (12), je remarque que la fonction

$$\Psi(x, y) = \Phi(x, y) - \sum_{i=1}^{i=n} A_i \mathcal{F}(x, y; \xi_i, \eta_i)$$

est une fonction admettant les $2p$ multiplicateurs donnés μ_k de $\Phi(x, y)$ et ne devenant plus infinie en aucun des points $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$. Mais cette fonction devient infinie du premier ordre au plus aux $p-1$ points arbitraires

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_{p-1}, y_{p-1})$$

qui figurent dans la fonction $\mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta)$. Je vais montrer que $\Psi(x, y)$ est identiquement nulle.

Supposons, en effet, que $\Psi(x, y)$ devienne effectivement infinie du premier ordre en p' des $p-1$ points (x_k, y_k), par exemple aux points

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_{p'}, y_{p'})$$

où

$$p' < p - 1.$$

Cette fonction Ψ pourra, d'après (6), se mettre sous la forme

$$\Psi(x, y) = C e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} \prod_{k=1}^{k=p'} \begin{bmatrix} x'_k, y'_k \\ x_k, y_k \end{bmatrix},$$

les p' points (x'_k, y'_k) étant convenablement choisis. Cette fonction Ψ admet les $2p$ multiplicateurs donnés μ_k, quels que soient les p' points (x_k, y_k) $(k = 1, 2, \ldots, p')$.

On a d'abord, en prenant les cycles qui donnent des multiplicateurs à indices impairs,

$$\mu_{2i-1} = e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

équations qui déterminent les λ_i; puis, pour les cycles qui donnent des multiplicateurs à indices pairs,

$$\mu_{2i} = e^{2\sum_{k=1}^{k=p} \lambda_k \alpha_{ik} + \sum_{k=1}^{k=p'} (u^{(i)}(x'_k, y'_k) - u^{(i)}(x_k, y_k))},$$

d'où

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{k=p'} (u^{(i)}(x'_k, y'_k) - u^{(i)}(x_k, y_k)) = \log \mu_{2i} - 2 \sum_{k=1}^{k=p} \lambda_k \alpha_{ik}.$$

On a ainsi p équations, telles que (13), dans lesquelles les seconds membres sont donnés à des multiples près des périodes, les premiers membres contenant p' points (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., $(x_{p'}, y_{p'})$ entièrement arbitraires. Je vais montrer qu'il est impossible, dans ces conditions, de satisfaire aux équations (13) en déterminant convenablement les points (x_k, y_k), $(k = 1, 2, \ldots, p')$, sauf dans le cas exceptionnel que nous avons écarté (5, éq. (7)).

En effet, soit $\int \frac{Q(x, y)}{F_y(x, y)} dx$ l'intégrale abélienne la plus générale de première espèce; faisons passer la courbe $Q(x, y) = 0$ par les p' points (x'_k, y'_k) et par $(p - 1 - p')$ points arbitraires $(x_{p'+1}, y_{p'+1}), (x_{p'+2}, y_{p'+2}), \ldots, (x_{p-1}, y_{p-1})$. Cette courbe $Q = 0$ coupera $F = 0$ en $(p - 1)$ autres points (x''_k, y''_k) tels que

$$\sum_{k=1}^{k=p'} u^{(i)}(x'_k, y'_k) + \sum_{k=p+1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x''_k, y''_k) \equiv 2C_i.$$

Tirant de là $\sum_{k=1}^{k=p'} u^{(i)}(x'_k, y'_k)$ pour le porter dans les équations (13), ces équations deviennent

$$(13') \qquad \sum_{k=1}^{k=p-1} [u^{(i)}(x''_k, y''_k) + u^{(i)}(x_k, y_k)] \equiv 2C_i - g_i,$$

où les $(p - 1)$ points

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2), \ \ldots, \ (x_{p-1}, y_{p-1})$$

sont entièrement arbitraires. Or ces équations (13') sont justement de la forme (9) que nous avons démontrée être impossible, sauf dans le cas exceptionnel $g_i \equiv 0$.

Cette fonction $\Psi(x, y)$ ne peut donc être que zéro identiquement, et la formule (12) se trouve démontrée. Je donne plus loin (9) une seconde démonstration de la formule (12).

7. Je m'occupe maintenant du cas particulier, déjà signalé précédemment, où les $2p$ multiplicateurs ont la forme (7). On pourrait déduire ce cas du précédent comme cas limite, mais il est bien plus simple d'employer la méthode suivante, qui s'applique facilement aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

Lorsque les multiplicateurs de la fonction Φ à décomposer ont cette forme (7), cette fonction peut se mettre sous la forme

$$(14) \qquad \Phi(x, y) = e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} R(x, y).$$

$R(x, y)$ étant une fonction rationnelle. Cette fonction rationnelle R peut être décomposée en éléments simples par la formule suivante, de Roch, indiquée par M. Lindemann dans une lettre à M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 84, p. 294),

$$(15) \qquad R = R_0 + A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + \ldots + A_n Z_n;$$

Z_i étant l'intégrale abélienne normale de seconde espèce, dont le pôle se trouve au point (ξ_i, η_i), et les résidus A_i de la fonction rationnelle $R(x, y)$ satisfaisant aux relations

$$(16) \qquad A_1 \psi_i(\xi_1, \eta_1) + A_2 \psi_i(\xi_2, \eta_2) + \ldots + A_n \psi_i(\xi_n, \eta_n) = 0,$$

ou

$$\psi_i(x, y) = \frac{du^{(i)}(x, y)}{dx}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces p équations (16) doivent d'ailleurs être modifiées lorsque certains des points (ξ_k, η_k) sont des points critiques de $F = 0$.

Multipliant alors les deux membres de la formule (15) par

$$e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)},$$

et faisant, pour simplifier,

$$(17) \qquad e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} Z_i = H_i,$$

on a la formule

$$(18) \qquad \Phi(x, y) = R_0 e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} + \sum_{k=1}^{k=n} A_k H_k.$$

L'élément de décomposition est ici la fonction H_k, définie par l'équation (17).

Cette formule (18) comprend, comme cas particulier, celle qui a été donnée par M. Mittag-Leffler.

8. De même que M. Hermite a déduit de la formule de décompo-

sition des fonctions doublement périodiques de seconde espèce celle des fonctions doublement périodiques ordinaires (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXV, p. 694), on peut déduire de la formule générale (12) la formule de décomposition (15) relative aux fonctions rationnelles. Il faut, pour cela, supposer que tous les multiplicateurs deviennent égaux à l'unité.

A cet effet, supposons d'abord que les multiplicateurs à indices impairs μ_{2i-1} deviennent égaux à l'unité. La formule (12) continue à subsister; les constantes λ_i sont toutes nulles. L'élément de décomposition est alors

$$(19)\qquad \mathcal{F}(x, y; \xi, \eta) = \mathrm{K}\,\frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i - g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}.$$

Pour simplifier l'écriture, désignons par $\Theta_k(u_i)$ la dérivée partielle $\frac{\partial\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_p)}{\partial u_k}$, et par $\mathrm{S}(u_k)$ la somme $\sum_{k=1}^{k=p} u_k$; puis posons

$$u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i = v_i,$$

et imaginons que le point (ξ, η) soit un point ordinaire de la courbe $\mathrm{F} = 0$. Alors la constante K de la formule (19) est donnée par

$$(20)\qquad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{S}[\psi_k(\xi, \eta)\Theta_k(h_i)]}{\Theta(h_i - g_i)}.$$

Les constantes g_i devant tendre vers zéro, faisons

$$g_i = \rho_i t \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les ρ_i étant des constantes et t une variable infiniment petite.

On a, par la formule de Taylor,

$$\Theta(v_i - g_i) = \Theta(v_i) - t\,\mathrm{S}[\rho_k\Theta_k(v_i)] + t^2\Theta',$$
$$\Theta(h_i - g_i) = \qquad - t\,\mathrm{S}[\rho_k\Theta_k(h_i)] + t^2\Theta'',$$

car $\Theta(h_i) = 0$. On en déduit

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{t}\,\frac{\mathrm{S}[\psi_k(\xi, \eta)\Theta_k(h_i)]}{\mathrm{S}[\rho_k\Theta_k(h_i)]} + \mathrm{K}' + \mathrm{K}''t,$$

$$\frac{\Theta(v_i - g_i)}{\Theta(v_i)} = 1 - t\,\frac{\mathrm{S}[\rho_k\Theta_k(v_i)]}{\Theta(v_i)} + t^2\,\frac{\Theta'}{\Theta(v_i)},$$

et, par suite,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{F}(x, y; \xi, \eta) = &-\frac{1}{t}\,\frac{S[\psi_k(\xi, \eta)\theta_k(h_i)]}{S[\rho_k\theta_k(h_i)]} \\ &+ \frac{S[\psi_k(\xi, \eta)\theta_k(h_i)]}{S[\rho_k\theta_k(h_i)]}\,\frac{S[\rho_k\theta_k(v_i)]}{\Theta(v_i)} + K' + Qt, \end{aligned}\right.$$

où K′ ne dépend pas de (x, y).

Il faut maintenant transformer encore cette expression de

$$\mathcal{F}(x, y; \xi, \eta).$$

Employons les notations suivantes [1] :

$$\mathcal{G}(\xi, \eta) = -\frac{d\log\Theta(v_i)}{d\xi} = \frac{S[\theta_k(v_i)\psi_k(\xi, \eta)]}{\Theta(v_i)},$$

$$\mathcal{G}(x_i, y_i) = -\frac{d\log\Theta(v_i)}{dx_i} = \frac{S[\theta_k(v_i)\psi_k(x_i, y_i)]}{\Theta(v_i)}.$$

On a, par suite,

$$(22)\quad \frac{S[\rho_k\theta_k(v_i)]}{\Theta(v_i)} = \alpha\mathcal{G}(\xi, \eta) + \alpha_1\mathcal{G}(x_1, y_1) + \ldots + \alpha_{p-1}\mathcal{G}(x_{p-1}, y_{p-1}),$$

les constantes $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ étant déterminées par les p équations du premier degré

$$(23)\quad \alpha\psi_i(\xi, \eta) + \sum_{k=1}^{k=p-1} \alpha_k\psi_i(x_k, y_k) = \rho_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Si l'on fait

$$\Delta = \begin{vmatrix} \psi_1(\xi, \eta) & \psi_1(x_1, y_1) & \ldots & \psi_1(x_{p-1}, y_{p-1}) \\ \psi_2(\xi, \eta) & \psi_2(x_1, y_1) & \ldots & \psi_2(x_{p-1}, y_{p-1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \psi_p(\xi, \eta) & \psi_p(x_1, y_1) & \ldots & \psi_p(x_{p-1}, y_{p-1}) \end{vmatrix},$$

on tire des équations (23) des valeurs de la forme

$$(23')\quad \alpha = \frac{\beta}{\Delta}, \quad \alpha_1 = \frac{\beta_1}{\Delta}, \quad \ldots, \quad \alpha_{p-1} = \frac{\beta_{p-1}}{\Delta},$$

ou β *ne dépend pas de* (ξ, η), $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}$ étant au contraire des

---

[1] L'intégrale abélienne normale de seconde espèce $Z(\xi, \eta)$, qui a un pôle au point (ξ, η), est égale à $\mathcal{G}(\xi, \eta) - \mathcal{G}_0(\xi, \eta)$, où $\mathcal{G}_0(\xi, \eta)$ désigne ce que devient $\mathcal{G}(\xi, \eta)$ quand on y remplace (x, y) par (x_0, y_0).

fonctions linéaires homogènes de $\psi_1(\xi, \eta)$, $\psi_2(\xi, \eta)$, ..., $\psi_p(\xi, \eta)$,

$$(24)\quad \beta_i = a_{i1}\psi_1(\xi,\eta) + a_{i2}\psi_2(\xi,\eta) + \ldots + a_{ip}\psi_p(\xi,\eta) \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Dans la formule (21), remplaçons $\frac{S[\rho_k\Theta_k(v_i)]}{\Theta(v_i)}$ par l'expression (22); on a

$$\mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{t}\frac{S[\psi_k(\xi, \eta)\Theta_k(h_i)]}{S[\rho_k\Theta_k(h_i)]}$$
$$+ \frac{S[\psi_k(\xi, \eta)\Theta_k(h_i)]}{S[\rho_k\Theta_k(h_i)]}\left[\alpha\mathcal{G}(\xi, \eta) + \sum_{k=1}^{k=p-1}\alpha_k\mathcal{G}(x_k, y_k)\right] + K' + Qt.$$

Comme le résidu de $\mathfrak{F}$, par rapport à l'infini (ξ, η), est l'unité, et que celui de $\mathcal{G}(\xi, \eta)$ est aussi l'unité, on a

$$(25)\qquad \alpha\frac{S[\psi_k(\xi, \eta)\Theta_k(h_i)]}{S[\rho_k\Theta_k(h_i)]} = 1.$$

Alors, d'après (23'), on peut écrire

$$\alpha_i = \frac{\beta_i}{\Delta} = \frac{\beta_i}{\beta}\alpha = \frac{\beta_i}{\beta}\frac{S[\rho_k\Theta_k(h_i)]}{S[\psi_k(\xi, \eta)\Theta_k(h_i)]},$$

et alors l'expression de $\mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta)$ devient

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta) = &-\frac{1}{t}\frac{S[\psi_k(\xi, \eta)\Theta_k(h_i)]}{S[\rho_k\Theta_k(h_i)]}\\ &+ \mathcal{G}(\xi, \eta) + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{i=p-1}\beta_i\mathcal{G}(x_i, y_i) + K' + Qt.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, prenons la formule de décomposition (12), et remplaçons-y les différents termes $\mathfrak{F}(x, y; \xi_k, \eta_k)$ par l'expression précédente (26); les résidus A_k de la fonction Φ doivent être considérés comme fonctions de t,

$$(27)\qquad A_k = \mathcal{A}_k + \mathcal{A}'_k t + \ldots.$$

Les premiers termes $\mathcal{A}_k$ de ces développements sont les résidus de la fonction rationnelle $R(x, y)$, vers laquelle tend $\Phi(x, y)$ quand t tend vers zéro. Ces résidus $\mathcal{A}_k$ satisfont donc aux p conditions

$$(28)\qquad \sum_{k=1}^{k=n}\mathcal{A}_k\psi_i(\xi_k, \eta_k) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

On voit alors que, dans la nouvelle forme que prend la formule (12), le coefficient de $\frac{1}{t}$ est nul, en vertu des équations (28), ainsi que les coefficients de $\mathcal{G}(x_i, y_i)$, car on a

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\beta_i)_k \alpha_k = 0,$$

$(\beta_i)_k$ désignant l'expression (24) de β_i, où l'on a remplacé (ξ, η) par (ξ_k, η_k). On a, par suite,

$$\Phi(x, y) = \text{const.} + \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \mathcal{G}(\xi_k, \eta_k) + Bt;$$

en faisant $t = 0$ et se reportant à la note de la page 16, on trouve bien la formule de Roch.

9. La formule fondamentale (12) peut encore s'obtenir de la façon suivante. Soit $\Phi(x, y)$ la fonction à décomposer, et faisons

$$(29)\quad T(\xi, \eta) = C e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i [u^i(x, y) - u^i(\xi, \eta)]} \frac{\Theta[u^i(x, y) - u^i(\xi, \eta) - h_i - g_i]}{\Theta[u^i(x, y) - u^i(\xi, \eta) + h_i]}.$$

Cette fonction T, considérée comme fonction de (ξ, η), a p infinis

$$(x, y), \quad (x'_1, y'_1), \quad \ldots, \quad (x'_{p-1}, y'_{p-1})$$

les $(p-1)$ points (x'_k, y'_k) étant les $(p-1)$ points où la courbe

$$Q(x, y) = 0,$$

qui passe par les points $(x_1, y_1), \ldots, (x_{p-1}, y_{p-1})$ coupe la courbe $F = 0$. Déterminons C de façon que le résidu de T relatif à l'infini (x, y) soit égal à -1,

$$C = \frac{S[\Theta_k(h_i)\psi_k(x, y)]}{\Theta(h_i - g_i)}.$$

On remarque de plus que $T(\xi, \eta)$, considéré comme fonction de (ξ, η), admet les multiplicateurs inverses de $\Phi(\xi, \eta)$. Le produit

$$\Phi(\xi, \eta)\, T(\xi, \eta)$$

est donc une fonction *rationnelle* de (ξ, η), devenant infinie aux n points

(ξ_k, η_k) qui sont les infinis de Φ, et aux p points (x, y), (x'_1, y'_1), ..., (x'_{p-1}, y'_{p-1}), qui sont les infinis de T. Or les résidus de cette fonction rationnelle sont, pour les points (ξ_k, η_k),

$$A_k T(\xi_k, \eta_k),$$

A_k étant le résidu de Φ ; pour le point (x, y),

$$-\Phi(x, y),$$

et pour les $(p-1)$ points (x'_k, y'_k),

$$B_k \Phi(x'_k, y'_k),$$

B_k étant le résidu de T relatif à l'infini (x'_k, y'_k).

On a donc, d'après les relations connues entre les résidus d'une fonction rationnelle,

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=n} A_k T(\xi_k, \eta_k)\, \psi_i(\xi_k, \eta_k) - \Phi(x, y)\, \psi_i(x, y) \\ &+ \sum_{k=1}^{k=p-1} B_k \Phi(x'_k, y'_k)\, \psi_i(x'_k, y'_k) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned} \right.$$

Soit posé

$$\Delta(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \psi_1(\xi, \eta) & \psi_2(\xi, \eta) & \ldots & \psi_p(\xi, \eta) \\ \psi_1(x'_1, y'_1) & \psi_2(x'_1, y'_1) & \ldots & \psi_p(x'_1, y'_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \psi_1(x'_{p-1}, y'_{p-1}) & \psi_2(x'_{p-1}, y'_{p-1}) & \ldots & \psi_p(x'_{p-1}, y'_{p-1}) \end{vmatrix}$$
$$= \psi_1(\xi, \eta)\, \Delta'_1 + \psi_2(\xi, \eta)\, \Delta'_2 + \ldots + \psi_p(\xi, \eta)\, \Delta'_p.$$

On a, en multipliant la première des équations (30) par Δ'_1, la deuxième par Δ'_2, ... la $p^{\text{ième}}$ par Δ'_p, et ajoutant,

$$(31)\qquad \Phi(x, y) = \frac{1}{\Delta(x, y)} \sum_{k=1}^{k=n} A_k T(\xi_k, \eta_k)\, \Delta(\xi_k, \eta_k),$$

et cette formule est identique à la formule de décomposition (12). Je vais, en effet, montrer que l'on a

$$(32)\qquad T(\xi_k, \eta_k) \frac{\Delta(\xi_k, \eta_k)}{\Delta(x, y)} = \varphi(x, y; \xi_k, \eta_k)$$

Pour vérifier cette formule (32), remplaçons $T(\xi, \eta)$ et $\mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta)$ par leurs valeurs (29) et (8), les constantes K et C étant aussi remplacées par leurs valeurs. La formule à vérifier devient

$$(33)\qquad \frac{S[\Theta_k(h_i)\psi_k(\xi, \eta)]}{S[\Theta_k(h_i)\psi_k(x, y)]} = \frac{\Delta(\xi, \eta)}{\Delta(x, y)},$$

vérification que l'on peut faire par la méthode suivante, qui pourrait déjà servir à démontrer la relation (25). On a, par le théorème d'Abel,

$$h_i = u^{(i)}(x'_1, y'_1) + u^{(i)}(x'_2, y'_2) + \ldots + u^{(i)}(x'_{p-1}, y'_{p-1}) - C_i;$$

d'autre part,

$$\Theta(h_i) = 0$$

identiquement, quels que soient (x'_i, y'_i). Donc les dérivées par rapport à x'_i sont nulles aussi, et l'on a ainsi $(p-1)$ équations

$$\Theta_1(h_i)\psi_1(x'_i, y'_i) + \ldots + \Theta_p(h_i)\psi_p(x'_i, y'_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1);$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Theta_1(h_i)}{\Delta'_1} = \frac{\Theta_2(h_i)}{\Delta'_2} = \ldots = \frac{\Theta_p(h_i)}{\Delta'_p} = \frac{S[\Theta_k(h_i)\psi_k(\xi, \eta)]}{\Delta(\xi, \eta)} = \frac{S[\Theta_k(h_i)\psi_k(x, y)]}{\Delta(x, y)},$$

ce qui démontre l'identité (33).

10. Dans la formule générale (12), il se présente cette circonstance singulière que l'élément de la décomposition $\mathfrak{F}(x, y; \xi, \eta)$ devient infini au pôle (ξ, η) et en $(p-1)$ autres points arbitraires. Cette circonstance ne peut pas être évitée si l'on veut prendre pour élément de décomposition une fonction admettant les $2p$ multiplicateurs donnés. Il est, en effet, impossible de former une fonction admettant les $2p$ multiplicateurs donnés et ne devenant infinie qu'en un pôle variable (ξ, η), sauf dans le cas de $p = 1$; car une pareille fonction serait de la forme

$$e^{\sum_{1}^{p} \lambda_i u^{(i)}(x, y)} \begin{bmatrix} \xi', & \eta' \\ \xi, & \eta \end{bmatrix},$$

et, en écrivant que cette fonction admet les $2p$ multiplicateurs μ_k, on

trouve, pour déterminer (ξ', η'), p équations qui sont en général incompatibles.

Mais on pourrait chercher un élément de décomposition ne devenant infini qu'en un point, et se reproduisant *multiplié par un facteur* μ_k *et augmenté d'une constante* γ_k quand le point (x, y) décrit un cycle. Une pareille fonction aurait pour dérivée une fonction admettant les $2p$ multiplicateurs μ_k. Voici comment on peut la former.

Soit $\int \frac{Q}{F_y} dx$ l'intégrale abélienne la plus générale de première espèce. La courbe $Q = 0$ coupe $F = 0$ en $2p - 2$ points ordinaires

$$(x'_k, y'_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, 2p - 2)$$

dont $p - 1$ sont arbitraires. Soient, en outre,

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_{2p-2}, y_{2p-2}),$$
$$(\xi', \eta'), \quad (\xi', \eta''), \quad (\xi, \eta),$$

$(2p - 2) + 3$ points arbitraires, dont le dernier (ξ, η) est essentiellement distinct des premiers.

La fonction

$$(34) \quad \mathfrak{P}(x, y; \xi, \eta) = \int \frac{Q}{F_y} \begin{bmatrix} \xi', & \eta' \\ \xi, & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'', & \eta'' \\ \xi, & \eta \end{bmatrix} \prod_{i=1}^{i=2p-1} \begin{bmatrix} x_i, & y_i \\ x'_i, & y'_i \end{bmatrix} e^{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i u'(x)} dx$$

ne devient infinie qu'au seul point (ξ, η).

Disposons des constantes λ_i et des $2p$ points

$$(\xi', \eta'), \quad (\xi'', \eta''),$$
$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_{2p-2}, y_{2p-2}),$$

de façon que la fonction sous le signe $\int$ admette les $2p$ multiplicateurs μ_k, et que le résidu de cette fonction relatif à l'infini $x = \xi$ soit nul; alors la fonction $\mathfrak{P}$ admet l'infini simple (ξ, η), et si le point (x, y) décrit un cycle, elle se reproduit multipliée par μ_k et augmentée d'une constante γ_k. Une pareille fonction pourrait servir d'élément de décomposition.

On voit les recherches auxquelles cette remarque peut conduire: je me propose d'y revenir plus tard dans un Mémoire sur les intégrales

de la forme

$$\int \Phi(x, y)\, dx,$$

$\Phi(x, y)$ désignant une fonction telle que (2); ces intégrales comprennent les intégrales abéliennes comme cas particuliers.

11. *Relations entre les résidus d'une fonction quelconque telle que* $\Phi(x, y)$.

Soit, comme dans le n° **5**, $\Phi(x, y)$ une fonction du point analytique (x, y) admettant les $2p$ multiplicateurs μ_k, $(k = 1, 2, \ldots, 2p)$, et devenant infinie du premier ordre aux points

$$(\xi_1, \eta_1),\ (\xi_2, \eta_2),\ \ldots,\ (\xi_n, \eta_n)$$

avec les résidus respectifs $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que ces points ξ_k, η_k ne sont pas des points critiques, et qu'ils sont tous à distance finie.

Désignons, comme dans le n° **10**, par

$$\int \frac{Q(x, y)}{F'_y(x, y)}\, dx,$$

l'intégrale abélienne la plus générale de première espèce; par

$$(x'_1, y'_1),\ (x'_2, y'_2),\ \ldots,\ (x'_{2p-2}, y'_{2p-2})$$

les $(2p - 2)$ points variables où la courbe $Q = 0$ coupe $F = 0$; enfin par

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_{2p-2}, y_{2p-2})$$

$(2p - 2)$ points analytiques pour le moment indéterminés. Considérons la fonction

$$(35) \qquad \varpi(x, y) = \frac{Q(x, y)}{F'_y(x, y)} \prod_{k=1}^{k=2p-2} \begin{vmatrix} x_k, y_k \\ x'_k, y'_k \end{vmatrix} e^{i \sum_{l=1}^{l=p} t_l \theta^{(l)}(x, y)}.$$

Ecrivons que cette fonction $\varpi(x, y)$ admet les multiplicateurs inverses des multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2p}$ de $\Phi(x, y)$. On a les $2p$

équations

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_{2i-1}} = e^{2l_i\pi\sqrt{-1}}, \\ \dfrac{1}{\mu_{2i}} = e^{2\left(l_1\alpha_{1i}+l_2\alpha_{2i}+\ldots+l_p\alpha_{pi}\right)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=2p-2}\left[u^{(i)}(x'_k, y'_k) - u^{(i)}(x_k, y_k)\right], \end{cases}$$

ou $i = 1, 2, \ldots, p$.

Les p premières équations déterminent $l_1, l_2, \ldots, l_p$; les p suivantes donnent ensuite, en vertu de la relation connue,

$$\sum_{k=1}^{k=2p-2} u^{(i)}(x'_k, y'_k) = 2C_i,$$

qui lie les $(2p-2)$ points (x'_k, y'_k), les équations

$$(37)\quad \sum_{k=1}^{k=2p-2} u^{(i)}(x_k, y_k) = 2C_i + 2(l_1\alpha_{1i} + \ldots + l_p\alpha_{pi}) + \log\mu_{2i},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p);$$

et ces équations (37) déterminent p des points (x_k, y_k) en fonction des $p-2$ autres qui restent arbitraires. Nous supposerons, par exemple, que les équations (37) déterminent les points

$$(x_{p-1}, y_{p-1}),\ (x_p, y_p),\ (x_{p+1}, y_{p+1}),\ \ldots,\ (x_{2p-2}, y_{2p-2})$$

en fonction des $(p-2)$ points

$$(38)\qquad (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_{p-2}, y_{p-2})$$

qui restent arbitraires. La fonction $\varpi(x, y)$ contient alors $(p-2)$ paramètres qui sont les points arbitraires (38). Le produit

$$(39)\qquad \Phi(x, y)\,\varpi(x, y)$$

est une fonction rationnelle de x et y devenant infiniment petite comme $\frac{1}{x^2}$ aux m points analytiques éloignés indéfiniment; donc, d'après un théorème connu, la somme des résidus de cette fonction rationnelle est nulle. Or la fonction (39) admet pour pôles, d'une part

les pôles $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$ de $\Phi(x, y)$ avec les résidus respectifs

$$A_1\varpi(\xi_1, \eta_1),\ A_2\varpi(\xi_2, \eta_2),\ \ldots,\ A_n\varpi(\xi_n, \eta_n),$$

et, d'autre part, les pôles de $\varpi(x, y)$ dont les résidus sont nuls, car l'intégrale $\int\varpi(x, y)\,dx$ est partout finie. On a donc la relation

$$(40)\qquad A_1\varpi(\xi_1, \eta_1) + A_2\varpi(\xi_2, \eta_2) + \ldots + A_n\varpi(\xi_n, \eta_n) = 0.$$

Comme la fonction ϖ contient $p-2$ points arbitraires $(x_1, y_1), \ldots, (x_{p-2}, y_{p-2})$, on obtient différentes relations, telles que (40), en donnant à ces points différentes positions. *Mais, parmi les relations en nombre infini que l'on obtient ainsi, il n'y en a que $p-1$ qui soient distinctes.* Considérons en effet $(p-1)$ systèmes de valeurs des points (38), et soient

$$\varpi_1(x, y),\ \varpi_2(x, y),\ \ldots,\ \varpi_{p-1}(x, y)$$

les $(p-1)$ fonctions ϖ correspondantes; soit toute autre fonction ϖ_p obtenue en donnant aux points (38) les valeurs déterminées

$$(x''_1, y''_1),\ (x''_2, y''_2),\ \ldots,\ (x''_{p-2}, y''_{p-2});$$

je vais montrer que cette fonction ϖ_p est égale à

$$(41)\qquad m_1\varpi_1(x, y) + m_2\varpi_2(x, y) + \ldots + m_{p-1}\varpi_{p-1}(x, y),$$

$m_1, m_2, \ldots, m_{p-1}$ étant des constantes.

En effet, l'expression (41) est une fonction ϖ et peut, par suite, se mettre sous la forme (35); en déterminant les coefficients $m_1, m_2, \ldots, m_{p-1}$, de façon que la fonction (41) s'annule aux $(p-2)$ points (x''_1, y''_1), $(x''_2, y''_2), \ldots, (x''_{p-2}, y''_{p-2})$, on obtiendra une fonction s'annulant aux mêmes points que ϖ_p en vertu des relations (37) qui déterminent tous les zéros de ϖ, dès qu'on en connaît $(p-2)$; la fonction (41), devenant nulle ou infinie aux mêmes points que ϖ_p, ne peut donc en différer que par un facteur constant; ce qui démontre la proposition.

Remarque. — Les raisonnements précédents sont en défaut dans le cas exceptionnel qui fait l'objet du n° **7**. Les résidus satisfont alors à p relations, que l'on obtient immédiatement à l'aide des relations (16) entre les résidus d'une fonction rationnelle.

Exposé des principes de la théorie des courants électriques;

PAR M. H. RESAL.

§ I. — COURANTS CONSTANTS.

1. Lorsque la fonction potentielle n'est pas constante dans l'intérieur d'un conducteur, l'électricité entre en mouvement et il se produit un *courant électrique*. Si cette fonction est indépendante du temps, ce mouvement devient permanent au bout d'un temps très court, à partir de l'instant initial, et le courant devient *constant*. Dans ce qui suit nous ne nous occuperons que des courants de cette nature.

2. *Loi de Ohm.* — Soient

A un point intérieur du conducteur;
V sa fonction potentielle;
$d\omega_x$ un élément superficiel en ce point normal à une droite Ox partant d'une origine O déterminée;
q_x la quantité d'électricité, rapportée à l'unité de surface, qui traverse $d\omega_x$ dans l'unité de temps, et qui ne dépend que de la position de A et de l'orientation de Ox;
dx une longueur infiniment petite portée à partir de A sur la normale à $d\omega_x$.

Ohm suppose que le *flux électrique* q_x est proportionnel à la composante $\frac{dV}{dx}$ de la force qui agit sur A, c'est-à-dire à la cause de ce flux.

On a ainsi, en désignant par a une constante,

$$(1) \qquad q_x = a\frac{dV}{dx}.$$

Cette expression n'est autre chose que celle d'un flux de chaleur traversant $d\omega_x$, en admettant que la température en A soit représentée par V.

Si donc Oy, Oz sont deux axes rectangulaires dont le plan est perpendiculaire à Ox, et x, y, z les coordonnées du point A, nous avons l'équation connue

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Mais on sait que, pour le point intérieur A, le second membre de cette équation, au lieu d'être nul, devrait être égal à $4\pi a\rho$, en désignant par ρ la densité du fluide concentrée en ce point; d'où il suit que $\rho = 0$, et comme conséquence :

1° *Le fluide se trouve à l'état neutre dans le conducteur;*

2° *L'électricité qui donne lieu à la fonction potentielle, c'est-à-dire au* NIVEAU POTENTIEL, *doit se trouver sur la surface du conducteur ou à l'extérieur de ce conducteur.*

Le flux principal, ou la plus grande valeur q de $q_x \ldots$, correspond au cas où Ox est parallèle à la normale en A à la surface de niveau passant par ce point; et, en continuant à désigner par dx un élément infiniment petit de la partie extérieure de cette normale, nous aurons

$$(3) \qquad q = a\frac{dV}{dx}.$$

Nous rappellerons que q_x n'est autre chose que la projection de q sur Ox.

On est convenu de désigner sous le nom de *force électromotrice* en A la dérivée $\frac{dV}{dx}$.

5. *Des conducteurs allongés dont la section est très petite.* — Dans

ces conducteurs, qui sont ceux que l'on emploie le plus généralement, on peut considérer la section normale ω en un point A de l'axe comme un élément de surface de niveau; et l'on a, pour la quantité de fluide qui traverse, dans l'unité de temps, cette section, c'est-à-dire pour l'*intensité du courant*,

$$(4) \qquad i = a\omega \frac{dV}{dx}.$$

Soient V_0, V_1 les valeurs de V qui se rapportent à deux points déterminés A_0, A_1 de l'axe du conducteur; l la longueur de l'arc A_0A_1.

Nous aurons

$$(5) \qquad V_1 - V_0 = i \int_0^l \frac{dx}{a\,d\omega}.$$

On est convenu de donner à la valeur $V_1 - V_0$ le nom de *force électromotrice de la longueur* A_0A_1 du courant, et de représenter par $\frac{dx}{a\omega}$ la *résistance à la conductibilité de l'élément linéaire* dx. Nous représenterons par

$$(6) \qquad R = \int_0^l \frac{dx}{a\omega}$$

la *résistance totale de la longueur l du courant*.

Nous avons ainsi

$$(7) \qquad Ri = V_1 - V_0.$$

Si la section du courant est constante, on a

$$R = \frac{l}{a\omega},$$

et

$$(8) \qquad a = \frac{\omega}{l}(V_1 - V_0).$$

Cette formule a été vérifiée expérimentalement au moyen du rhéo-

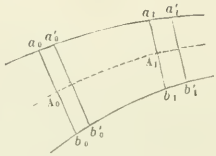
mètre, lorsque, ne changeant rien à la pile, c'est-à-dire à $(V_1 - V_0)$, on fait varier la section et la longueur du circuit.

4. *Loi de Joule.* — Considérons un conducteur de la même catégorie que les précédents.

Soient (*fig.* 1)

$a_0 b_0$, $a_1 b_1$ les sections normales à l'axe du circuit en A_0, A_1;

Fig. 1.



$a_0 b'_0$, $a'_1 b'_1$ les sections que viennent occuper, au bout d'un temps infiniment petit dt, les particules électriques qui se trouvaient primitivement dans $a_0 b_0$, $a_1 b_1$.

Le travail des forces électriques développé dans le transport de la masse $a_0 b_0 a_1 b_1$ en $a'_0 b'_0 a'_1 b'_1$ ne peut résulter que du transport fictif de la masse $a_0 b_0 a'_0 b'_0$ égale à $i\,dt$ en $a_1 b_1 a'_1 b'_1$ [1], puisque rien n'est changé dans la partie commune $a'_0 b'_0 a_1 b_1$. Le travail électrique effectué dans le temps dt est donc $(V_1 - V_0)\,dt$ et, dans l'unité de temps,

$$\mathfrak{T} = i(V_1 - V_0), \tag{9}$$

ou, en ayant égard à la relation (7),

$$\mathfrak{T} = i^2 R. \tag{10}$$

---

[1] On admet ainsi l'hypothèse des tranches dans le mouvement permanent des fluides.

Ce travail est équivalent à la demi-force vive de la masse électrique i, censée condensée en A_0, en passant de là en A_1, augmentée d'un terme proportionnel à la quantité de chaleur dégagée par le circuit. Si l'on considère la première de ces quantités comme négligeable, $\mathfrak{T}$ se trouvera ainsi transformée en une quantité de chaleur sensible $\mathfrak{Q}$, et l'on aura, en désignant par A l'équivalent mécanique de la chaleur, sous toute réserve du choix des unités,

$$\mathfrak{Q} = \frac{i^2 R}{A}. \tag{11}$$

Ainsi donc *la quantité de chaleur développée dans le circuit est proportionnelle au carré de l'intensité du courant et à la résistance du conducteur.*

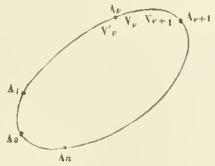
Cette loi, découverte expérimentalement par M. Joule, n'est qu'une conséquence de celle de Ohm et *vice versa*. Qu'il nous suffise de dire que nous avons déjà jusqu'ici une double justification des résultats de la théorie.

§ II. — Courants thermo-électriques.

5. Considérons un circuit formé de $n+1$ parties ou éléments appartenant respectivement à différents métaux, et soudées les unes à la suite des autres.

Si les soudures successives A_0, A_1, ..., A_n (*fig.* 2) sont portées à di-

Fig. 2.



verses températures, il se développera généralement un courant électrique d'intensité i.

Supposons, pour fixer les idées, sous toutes réserves, que A_0, A_1, ..., A_n indiquent le sens du courant.

Pour expliquer le fait dont il s'agit, on a été conduit, par des considérations qui appartiennent au domaine de la philosophie naturelle, et auxquelles nous ne croyons pas devoir nous arrêter, à admettre que le niveau potentiel change brusquement de valeur lorsque l'on traverse la soudure A_ν. Néanmoins, la formule (9), d'après la manière dont elle a été établie, est encore applicable à deux sections infiniment voisines situées de part et d'autre de A_ν.

Cela étant posé, soient

V_ν, $V'_{\nu+1}$ les valeurs du niveau potentiel aux extrémités A_ν, $A_{\nu+1}$ de l'une des parties du circuit;

R_ν la résistance à la conductibilité correspondante.

Nous avons

$$R_\nu i = V'_{\nu+1} - V_\nu.$$

En faisant la somme de toutes les expressions semblables et désignant par

$$\mathcal{R} = \Sigma R_\nu$$

la résistance totale du circuit, il vient

$$\mathcal{R} i = \Sigma (V'_{\nu+1} - V_\nu)$$

ou encore, comme il est facile de le reconnaître,

$$\mathcal{R} i = \Sigma (V'_\nu - V_\nu). \tag{12}$$

Il faut que le second membre de cette expression soit positif pour que le courant ait lieu dans le sens supposé; s'il est négatif, le sens du courant sera changé; enfin, s'il est nul, il n'y aura pas de courant.

6. *Cas d'un courant bimétallique.* — C'est le seul cas qui ait été étudié par les physiciens et qui offre, par suite, de l'intérêt. Nous avons ici simplement

$$i = \frac{V'_0 - V_0 - (V_1 - V'_1)}{\mathcal{R}}. \tag{13}$$

Comme l'intensité d'un courant thermo-électrique est toujours faible, on peut négliger la quantité de chaleur

$$\mathcal{Q} = \frac{i^2 R}{A}$$

développée dans le courant, indépendante de celle qui se rapporte aux soudures A_0, A_1.

Soient

t_0, t_1 les températures de ces soudures;

$Q_0 = \frac{i(V'_0 - V_0)}{A}$ la quantité de chaleur dégagée par la surface A_0 dans l'unité de temps;

$Q_1 = \frac{i(V_1 - V'_1)}{A}$ la quantité de chaleur absorbée par la source froide A_1.

Comme le fluide électrique qui sert de véhicule à la chaleur revient

Fig. 3.

au même état quand il a parcouru le circuit, on peut appliquer ici le principe de Carnot et écrire

$$\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{1 + \alpha t_0}{1 + \alpha t_1},$$

en se rappelant que α représente le coefficient de dilatation des gaz.

On déduit de là

$$\frac{V'_0 - V_0}{1 + \alpha t_0} = \frac{V_1 - V'_1}{1 + \alpha t_1}.$$

Nous représenterons ce rapport par $\frac{KR}{\alpha}$, et nous supposerons que K ne dépend que de la nature et des dimensions du circuit, et est par

conséquent indépendant des températures des soudures. La formule (16) devient alors

$$i = K(t_0 - t_1), \tag{17}$$

et s'accorde avec les résultats des expériences de César Becquerel, lorsque l'excès de température $(t_0 - t_1)$ ne dépasse pas 50°.

Au delà de cette limite, i croît moins rapidement que l'excès de température, et son accroissement devient sensiblement nul et même négatif quand $t_0 - t_1$ atteint et dépasse 300°. On attribue cette irrégularité à ce que deux métaux en contact, dont les températures sont très différentes, éprouvent des modifications dans leur constitution, et qu'ils se comportent vis-à-vis l'un de l'autre comme des métaux d'une autre nature.

§ III. — *Théorie de la pile.*

7. *De l'électrolyse.* — On donne le nom d'*électrolyte* à toute substance qui est complétement décomposée dans ses éléments chimiques lorsqu'elle est traversée par un courant. Si la décomposition n'a lieu que partiellement, en d'autres termes, si au moins un des produits de cette décomposition est encore une combinaison chimique, la substance est une *électrolycate*.

Les expressions *électrolyse* et *électrolysation* sont des dérivés de celle de *électrolyte*.

Une *électrode* est l'un ou l'autre des points de la substance par où arrive et d'où sort le courant.

L'électrolyse est soumise aux lois suivantes :

1° *L'action décomposante d'un courant, ou sa puissance chimique, est la même dans toutes ses parties.*

2° *La quantité de substance décomposée est proportionnelle à la quantité d'électricité qui passe dans un temps donné, ou encore à l'intensité du courant.*

3° (Loi de Faraday). *Quand un même courant traverse successivement plusieurs électrolytes, les poids des éléments séparés sont entre eux comme leurs équivalents chimiques.*

On donne le nom d'*équivalents électrochimiques* au poids d'un corps qui est modifié dans l'unité de temps par un courant dont l'intensité est égale à l'unité.

8. *De la pile.* — En continuant à désigner par A l'équivalent mécanique de la chaleur, soient q' la quantité de chaleur produite par la dissolution de 1^{kg} de zinc dans un liquide acide; ε' l'équivalent électrochimique du zinc.

Lorsque l'intensité du courant est i, le poids du zinc dissous dans l'unité de temps est $\varepsilon' i$, et donne lieu à un dégagement de chaleur $\varepsilon' i q'$ correspondant à la production de travail $A\varepsilon' i q'$. Si la pile est formée de n éléments, le travail électrochimique ou l'*action chimique*, suivant une expression admise, sera $nA\varepsilon' i q$.

Soient R la résistance du fil conducteur que forme le circuit en dehors de la pile; R′ la résistance de chacun des éléments de la pile; la résistance totale sera $R + nR'$ et la loi de Joule conduit à l'identité

$$nA\varepsilon' i q' = (R + nR')i^2,$$

d'où

$$i = \frac{nA\varepsilon' q'}{R + nR'}. \tag{17}$$

Si le nombre des éléments de la pile est suffisamment petit, on a à très peu près

$$i = \frac{nA\varepsilon' q'}{R}, \tag{18}$$

et *l'intensité du courant est proportionnelle au nombre des éléments.*

Si, au contraire, le nombre des éléments est très grand, on a approximativement

$$i = \frac{A\varepsilon' q'}{R'}, \tag{19}$$

et *l'intensité du courant est sensiblement constante.* On voit ainsi qu'il n'y a aucun avantage à multiplier outre mesure le nombre des éléments de la pile.

Ces deux résultats sont conformes à ceux de l'expérience.

9. Supposons que l'on place dans le circuit un certain nombre d'électrolytes (E_1), (E_2), ...; soient ε_ν, R_ν, q_ν l'équivalent électrochimique de (E_ν), sa résistance et la quantité de chaleur nécessaire pour décomposer son unité de poids; on reconnaît sans peine que l'on a

$$nA\varepsilon' iq' = i^2(R + nR' + \Sigma_1 R_\nu) + \Sigma_1 A\varepsilon_\nu iq_\nu,$$

d'où

$$(20) \qquad i = \frac{A(n\varepsilon' q' - \Sigma_1 \varepsilon_\nu q_\nu)}{R + nR' + \Sigma_1 R_\nu}.$$

Pour que le courant se produise, il faut que $An\varepsilon' q' > \Sigma_1 A\varepsilon_\nu q_\nu$ ou que l'action chimique de la pile soit supérieure à la somme des actions chimiques des électrolytes.

§ IV. — De l'induction électrique.

10. *Différentes formes sous lesquelles on peut mettre la formule d'Ampère* (¹). — Soient (*fig.* 1)

AB, A'B' deux courants électriques;

Fig. 1.

A, A' deux points déterminés de ces courants, qui sont censés se produire de A vers B et de A' vers B';
a, a' deux points quelconques de AB, A'B';
s, s' les longueurs d'arc Aa, A'a';

(¹) *Voir* nos *Recherches sur l'Électrodynamique*.

$ab = ds$, $a'b' = ds'$ les deux éléments de courant correspondant à a et a';
r la distance aa';
α, α' les angles formés par ab, $a'b'$ avec aa' et $a'a$;
θ l'angle compris sous les deux plans $a'ab$, $aa'b'$;
i, i' les intensités des courants AB, A'B';
ε l'angle formé par ab avec $a'b'$.

Nous pouvons considérer r, α, α', θ et ε comme étant des fonctions de s et s'.

Nous avons trouvé, pour l'expression de l'action mutuelle de deux courants,

$$(1) \qquad \psi = ii'\,ds\,ds'\left(\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{2} + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta\right).$$

Une parallèle en a à $a'b'$, le prolongement de $a'a$ et la direction de ab déterminent un angle trièdre qui conduit à la relation

$$\cos\varepsilon = -\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta,$$

et l'expression (1) peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \psi = ii'\,ds\,ds'\left(\frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\varepsilon\right).$$

Nous avons vu que l'on avait aussi l'expression plus simple

$$(3) \qquad \psi = \frac{ii'\,ds\,ds'}{2\cos\alpha}\,\frac{d\dfrac{\cos^2\alpha}{r}}{ds'},$$

ou, en développant,

$$\psi = ii'\frac{ds\,ds'}{r^2}\left(-\frac{\cos\alpha}{2}\frac{dr}{ds'} + r\frac{d\cos\alpha}{ds'}\right);$$

mais on a

$$\cos\alpha = -\frac{dr}{ds},$$

par suite,

$$\psi = \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - r\frac{d^2 r}{ds\,ds'}\right). \tag{4}$$

Si l'on pose $r = z^2$, $\frac{dr}{ds} = u$, on reconnait facilement que le facteur en r de cette expression devient

$$-\frac{1}{2}\frac{d\frac{u}{z}}{ds'} = -\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{d}{ds'}\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{dr}{ds} = -\frac{2}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}.$$

Nous avons donc enfin

$$\psi = -\frac{2\,ii'\,ds\,ds'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}. \tag{5}$$

11 *Formules de Weber.* — Dès 1822, Ampère [1] avait émis l'idée que l'on pourrait se rendre compte de la loi relative à l'action mutuelle de deux éléments de courant, en supposant que deux particules électriques m, m' s'attirent ou se repoussent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance, à la condition de faire intervenir un coefficient égal à l'unité augmentée d'un terme U qui ne dépend que du mouvement relatif de m et m'; ce qui revient à représenter l'action mutuelle de m, m' par

$$x = -\frac{mm'}{r^2}(1 + \mathrm{U}),$$

en continuant à considérer une attraction comme positive

Ampère est resté à cette conception philosophique sans la développer. Gauss l'a reprise plus tard et a admis que U est composé de deux termes, l'un proportionnel au carré de la vitesse relative de m et m',

[1] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1823.

l'autre au carré de la composante $\frac{dr}{dt}$ suivant mm' de cette vitesse, les coefficients des deux termes pouvant d'ailleurs dépendre de r. L'hypothèse de Gauss doit être rejetée, parce qu'elle conduit à des résultats inadmissibles au point de vue de l'expérience.

En considérant le cas de deux éléments de courant situés dans le prolongement l'un de l'autre, Weber a été conduit à admettre que U renferme un terme qui dépend de la vitesse relative estimée suivant r, et il a supposé que ce terme, à un coefficient près, est de la forme $\frac{dr^2}{dt^2}$. Examinant ensuite le cas de deux éléments perpendiculaires à une droite, il est arrivé à conclure que U doit renfermer aussi un terme proportionnel à l'accélération relative $\frac{d^2 r}{dt^2}$, estimée suivant r. C'est ainsi qu'il a été amené à poser généralement

$$(6) \qquad x = -\frac{mm'}{r^2}\left(1 + \alpha\frac{dr^2}{dt^2} + \beta\frac{d^2 r}{dt^2}\right),$$

α et β désignant des fonctions de r qui doivent être déterminées de manière que les résultats auxquels conduit cette formule soient d'accord avec la formule d'Ampère.

Soient v, v' les vitesses de m, m' qui sont censées des fonctions des trois variables s, s', t; ds, ds' les chemins parcourus par ces points dans l'élément de temps dt. Nous avons, en employant la caractéristique ∂, pour les dérivées partielles, à la place de celle d qui est réservée aux dérivées totales,

$$(a) \qquad \left\{\begin{aligned} & v = \frac{ds}{dt}, \quad v' = \frac{ds'}{dt}, \\ & \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial r}{\partial t} = v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial r}{\partial t}, \\ & \frac{d^2 r}{dt^2} = v^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + 2vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + v'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s} \\ & \qquad + v\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r'}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}. \end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (6), et posant

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathcal{A} = 1 + \alpha\frac{\partial r^2}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial^2 r}{dt^2},\\
&\mathfrak{B} = \alpha\frac{\partial r^2}{\partial s^2} + \beta\frac{\partial r^2}{\partial s^2}, \quad \mathfrak{B}' = \alpha\frac{\partial r^2}{\partial s'^2} + \beta\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2},\\
&\mathfrak{C} = 2\left(\alpha\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \beta\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right),\\
&\mathfrak{D} = 2\alpha\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t} + \beta\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \mathfrak{D}' = 2\alpha\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial t} + \beta\frac{dv'}{dt}\frac{\partial r}{\partial s'},\\
&\mathcal{E} = \beta\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \mathcal{E}' = \beta\frac{\partial v'}{\partial t}\frac{\partial s'}{\partial r},
\end{aligned}\right.$$

on trouve

$$(8)\quad \chi = -\frac{mm}{r^2}(\mathcal{A} + \mathfrak{B}v^2 + \mathfrak{C}vv' + \mathfrak{B}'v'^2 + \mathfrak{D}v + \mathfrak{D}'v' + \mathcal{E} + \mathcal{E}').$$

Supposons maintenant que les éléments de courant ds, ds' soient formés chacun d'un couple de particules électriques, savoir m, m_1 pour le premier élément et m', m'_1 pour le second. Soient v_1, v'_1 les vitesses de m_1, m'_1 qui peuvent être différentes de v, v'; $\mathfrak{D}_1$, $\mathcal{E}_1$ et $\mathfrak{D}'_1$, $\mathcal{E}'_1$ les valeurs de $\mathfrak{D}$, $\mathcal{E}$ et $\mathfrak{D}'$, $\mathcal{E}'$ quand on y remplace respectivement v par v_1 et v' par v'_1.

L'action mutuelle ψ de ds et ds' s'obtiendra en ajoutant l'expression (8) à celles qui en résultent quand on y remplace successivement m par m_1, m' par m'_1 et enfin m, m' par m_1, m'_1. On trouve ainsi

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\psi = -\frac{1}{r^2}\Big[&\mathcal{A}(m + m_1)(m' + m'_1) + \mathfrak{B}(m' + m'_1)(mv^2 + m_1v_1^2)\\
&+ \mathfrak{B}'(m + m_1)(m'v'^2 + m'_1v'_1)^2 + \mathfrak{C}(mv + m_1v_1)(m'v' + m'_1v'_1)\\
&+ \mathfrak{D}m(m' + m'_1)v + \mathfrak{D}_1m_1(m' + m'_1)v_1 + \mathcal{E}(m' + m'_1)m + \mathcal{E}_1(m' + m'_1)m_1\\
&+ \mathfrak{D}'(m' + m_1)v' + \mathfrak{D}'_1m'_1(m + m_1)v'_1 + \mathcal{E}'(m + m_1)m' + \mathcal{E}'_1(m + m_1)m'_1.
\end{aligned}\right.$$

En comparant ce résultat à la formule (4), on voit que, à l'exception du terme en $\mathfrak{C}$, tous les autres doivent disparaître, condition à

laquelle on satisfait en posant

$$m_1 = -m, \quad m'_1 = -m', \tag{10}$$

et l'expression précédente se réduit à

$$\psi = -\frac{2mm'}{r^2}(v - v_1)(v' - v'_1)\left(\alpha\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s} + \beta\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s}\right). \tag{11}$$

Si, en désignant par a une longueur constante, nous posons

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{m(v - v_1)}{a}\sqrt{2} = i\,ds, \quad m'\frac{(v' - v'_1)}{a}\sqrt{2} = i'\,ds', \\ &\alpha = -\frac{1}{2a^2}, \quad \beta = \frac{r}{a^2}, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

la formule (11) rentre dans la formule (4), et la formule (6) prend la forme

$$x = \frac{mm'}{r^2}\left[1 + \frac{1}{a^2}\left(r\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt^2}\right)\right], \tag{13}$$

et par suite la suivante

$$x = mm'\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right). \tag{14}$$

Il résulte des relations (10) qu'un élément de courant ds peut être considéré comme étant composé de deux particules électriques de même masse en valeur absolue, mais appartenant respectivement à l'un et à l'autre fluide. Rien ne s'oppose à ce que l'on puisse admettre que ces deux particules sont animées de deux vitesses égales et de sens contraires, et alors on a simplement

$$i = 2\sqrt{2}\frac{mv}{a}, \quad i' = 2\sqrt{2}\frac{m'v'}{a}. \tag{15}$$

Il suit de là que l'on peut regarder un courant comme formé de deux courants inverses l'un de l'autre et appartenant, l'un au fluide po-

sitif, l'autre au fluide négatif, et qui ont chacun pour intensité la moitié de celle du courant complet.

On s'assurera facilement que la force x dérive d'un potentiel et que ce potentiel a pour expression

$$\varphi = \frac{mm'}{r}\left[1 - \frac{1}{4a^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]. \tag{16}$$

12. *Potentiel de l'action mutuelle de deux éléments de courant.* — En se reportant à la troisième formule (a), on a

$$mm'\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = mm'\left(v^2\frac{\partial r^2}{\partial s^2} + v'^2\frac{\partial r^2}{\partial s'^2} + 2vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + 2v\frac{\partial r}{\partial t} + 2v'\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r^2}{\partial t^2}\right).$$

Remplaçons dans cette expression m par m' puis m par m_1, enfin m, m' par m_1, m'_1. Faisons la somme des expressions ainsi obtenues, puis supposons dans cette somme $m_1 = -m$, $m'_1 = -m'$; on reconnaît facilement qu'elle se réduit à

$$8mm'vv'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Le potentiel cherché Φ ou la somme des expressions (16) pour les quatre couples de molécules a ainsi pour expression

$$\Phi = -2\frac{mm'vv'}{a^2 r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'},$$

ou, en vertu des relations (15),

$$\Phi = -\frac{1}{4}\frac{ii'\,ds\,ds'}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}. \tag{17}$$

13. *Potentiel total relatif à deux courants fermés d'intensités constantes agissant l'un sur l'autre.* — Ce potentiel, que l'on appelle aussi l'*énergie potentielle* des deux circuits, a pour expression

$$\Theta = -\frac{ii'}{4}\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds\,ds'. \tag{18}$$

Mais on a, en intégrant par parties,

$$\int \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds' = -\int r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\,ds' = -\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) + \int \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}\,ds'.$$

De ce que le courant AB est fermé, le premier terme de cette expression est nul; on a donc simplement

$$\Theta = -\frac{ii'}{4}\int\int \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}\,ds\,ds'.$$

Soient (*fig.* 1) a'_1, b'_1 les projections de a', b' sur la direction de ab; il vient, en conservant les notations du n° 1,

$$aa'_1 = r\cos\alpha,\quad ab'_1 = r\cos\alpha + \frac{\partial r\cos\alpha}{\partial s'}\,ds',\quad a'_1 b'_1 = \frac{\partial r\cos\alpha}{\partial s'}\,ds',$$

$$a'_1 b'_1 = ds'\cos\varepsilon,\quad \cos\alpha = -\frac{\partial r}{\partial s};$$

d'où

$$\cos\varepsilon = \frac{\partial r\cos\alpha}{\partial s'} = -\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'},$$

et enfin

$$\Theta = \frac{ii'}{4}\int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds', \tag{19}$$

formule qui est due à F.-E. Neumann.

14. *Force électromotrice d'un courant induit produit dans un circuit par un courant extérieur.* — Soient A'B' le courant et AB le circuit dans lequel se développe le courant induit.

L'accélération tangentielle, ou suivant ab, de la particule m produite par les actions de m, m'_1 s'obtiendra en faisant dans la formule (9) $m = 1$, $m'_1 = -m'$, $v'_1 = v'$ et multipliant le résultat par $\cos\alpha = -\frac{\partial r}{\partial s}$, ce qui donne

$$\frac{m'}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\left[2Cvv' + (\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'_1)v' + \mathcal{E}' - \mathcal{E}'_1\right].$$

L'accélération semblable de m_1 se déduira de cette expression en y remplaçant v par $v_1 = -v$, et comme elle est de sens contraire à la précédente, elle devra lui être ajoutée pour avoir l'accélération relative η de m par rapport à m' : on trouve ainsi

$$\eta = 2\frac{m'}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}[(\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'_1)v' + \mathfrak{E}' - \mathfrak{E}'_1].$$

Mais, en se reportant aux formules (7) et remarquant que $v'_1 = -v'$, on a

$$\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'_1 = 4\alpha\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial t}, \quad \mathfrak{E}' - \mathfrak{E}'_1 = 2\beta\frac{\partial r'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'},$$

d'où

$$\eta = \frac{4m'}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\left(2\alpha v'\frac{\partial r}{\partial t} + \beta\frac{\partial v'}{\partial t}\right),$$

et en remplaçant α, β, $m'v'$ par leurs valeurs déduites des équations (12) et (15),

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{a}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{1}{r^2}\left(-i'\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{r\,\partial i'}{\partial t}\right)ds' = \frac{\sqrt{2}}{a}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial\frac{i'}{r}}{\partial t}ds'.$$

Nous avons donc, pour la force électromotrice totale développée dans le courant AB, en remarquant que i' seul est fonction du temps,

$$E = \int\eta\,ds = \frac{\sqrt{2}}{a}\int\int\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial\frac{i'}{r}}{\partial t}ds\,ds' = \frac{\sqrt{2}}{a}\frac{di'}{dt}\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}ds\,ds',$$

ou, d'après le numéro précédent,

$$E = -\frac{\sqrt{2}}{a}\frac{di'}{dt}\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}ds\,ds'. \tag{20}$$

Tel est le résultat cherché.

Des bissectrices d'un réseau de lignes tracées sur une surface quelconque;

PAR M. L'ABBÉ AOUST.

ÉTAT DE LA QUESTION.

Le problème des bissectrices d'un réseau de courbes tracées sur une surface consiste à déterminer les courbes qui, en un point quelconque de leur parcours, partagent en deux parties égales l'angle qu'une ligne d'un faisceau de courbes données tracées sur une surface fait avec une ligne d'un autre faisceau de courbes données, également tracées sur la même surface.

Ce problème présente deux cas : le premier où les courbes des deux faisceaux sont les lignes coordonnées, le second où les courbes des deux faisceaux sont distinctes des lignes coordonnées.

Bien souvent, on peut prendre pour réseau de lignes coordonnées les deux faisceaux de courbes données : alors la mise en équation du problème et les calculs sont facilités, comme nous l'avons montré dans notre *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*, publiée en 1869 ; mais il arrive aussi souvent que les deux faisceaux de courbes données ne peuvent pas être pris pour système de lignes coordonnées, comme cela arrive lorsque ce double faisceau est donné par une équation différentielle du second degré, non intégrable : alors la question doit être traitée d'une manière générale, c'est-à-dire, en admettant que le réseau des lignes données est distinct du réseau des lignes coordonnées.

Cette méthode générale a l'avantage de faire connaître les relations qui existent entre les rapports différentiels des lignes données et les rapports différentiels des bissectrices, intérieure et extérieure, de l'angle du réseau, ainsi que les théorèmes de Géométrie qui résultent de ces relations. C'est à ce point de vue, tout à fait général, que la question est traitée dans notre présent travail. Nous établissons ces relations avec simplicité et nous montrons comment elles conduisent à l'intégration des équations différentielles qui en résultent. Cette théorie donne avec la même facilité les bissectrices réelles d'un réseau de courbes imaginaires.

Les lignes de courbure se présentent comme conséquence de cette analyse, nous avons soin d'étudier ces courbes à ce point de vue et d'en faire la généralisation. Nous arrivons à quelques théorèmes importants, suivant nous, en ce qu'ils donnent divers modes de génération des lignes de courbure.

§ I.

1. *Trajectoire d'un faisceau de courbes.* — Soit un faisceau de courbes tracées sur une surface donnée et représentées par l'équation

$$F(\rho, \rho_1) = u, \tag{1}$$

rapportée à des coordonnées curvilignes ρ et ρ_1, u étant un paramètre dont la variation donne toutes les courbes du faisceau. Si l'on représente par M, M_1 les dérivées de F par rapport à ρ et ρ_1, l'équation différentielle des courbes (1) sera

$$\frac{d\rho}{M_1} = -\frac{d\rho_1}{M}. \tag{1'}$$

Soient

ds le déplacement effectué sur la courbe que l'on considère dans le faisceau (u);

$d\sigma$, $d\sigma_1$ les arcs coordonnés qui sont les composantes obliques de ce déplacement dans le système coordonné (ρ, ρ_1);

φ l'angle de ce système;

H, H_1 et G les paramètres différentiels.

On a les relations

$$(2)\qquad d\sigma = \mathrm{H}\,d\rho, \quad d\sigma_1 = \mathrm{H}_1\,d\rho_1,$$

$$(3)\qquad ds^2 = \mathrm{H}^2\,d\rho^2 + \mathrm{H}_1^2\,d\rho_1^2 + 2\mathrm{G}^2\,d\rho\,d\rho_1;$$

de sorte que, si l'on pose

$$(4)\qquad \mathrm{K}^2 = \mathrm{M}_1^2\mathrm{H}^2 + \mathrm{M}^2\mathrm{H}_1^2 - 2\mathrm{M}\mathrm{M}_1\mathrm{G}^2,$$

on a les deux équations

$$(4'')\qquad \frac{d\rho}{\mathrm{M}_1} = -\frac{d\rho_1}{\mathrm{M}} = \frac{ds}{\mathrm{K}}.$$

Soient maintenant δs le déplacement effectué sur une courbe C_1 qui coupe les courbes du faisceau (u) sous un angle ψ; $\delta\sigma$, $\delta\sigma_1$ les arcs coordonnés de ce déplacement; le double de l'aire du triangle infinitésimal dont les deux côtés sont ds, δs, qui comprennent l'angle ψ, a pour expression

$$(5)\qquad ds\,\delta s \sin\psi = \sin\varphi(d\sigma\,\delta\sigma_1 - d\sigma_1\,\delta\sigma);$$

si l'on représente par $\delta\rho$, $\delta\rho_1$ les variations de ρ et ρ_1 relatives à $\delta\sigma$, $\delta\sigma_1$, on obtient par l'élimination de $d\sigma$, $d\sigma_1$; $\delta\sigma$, $\delta\sigma_1$ au moyen des équations précédentes, la condition suivante :

$$(6)\qquad \mathrm{K}\,\delta s \sin\psi = \mathrm{H}\mathrm{H}_1 \sin\varphi(\mathrm{M}_1\,\delta\rho_1 + \mathrm{M}\,\delta\rho);$$

or, si dans l'équation (1) on regardait u comme variable et δu la variation de u correspondant aux variations $\delta\rho$, $\delta\rho_1$, l'équation précédente s'écrirait sous la forme plus simple

$$(6')\qquad \mathrm{K}\,\delta s \sin\psi = \mathrm{H}\mathrm{H}_1 \sin\varphi\,\delta u.$$

Cette équation est l'équation des trajectoires sous l'angle ψ des courbes du faisceau (u).

2. *Bissectrices d'un réseau de courbes.* — Soit un second faisceau de

courbes donné par l'équation

$$(7) \qquad F_1(\rho, \rho_1) = u_1;$$

les courbes du faisceau (u) coupées par les courbes du faisceau (u_1) forment un réseau (u, u_1); on se propose de calculer les courbes bissectrices de l'angle sous lequel le faisceau (u) est coupé par le faisceau (u_1).

Soient, comme précédemment, N, N_1 les dérivées de u_1 par rapport à ρ et à ρ_1; appelons K_1 ce que devient K quand on y remplace u par u_1; soit ds_1 le déplacement effectué sur la courbe du faisceau (u_1), on aura

$$(7') \qquad \frac{d\rho}{N_1} = -\frac{d\rho_1}{N} = \frac{ds_1}{K_1}.$$

Or, si la trajectoire δs déjà considérée coupe, sous l'angle ψ_1, ce nouveau faisceau de courbes, on aura, d'après les équations (6) et (6'), la condition

$$(8) \qquad K_1\,\delta s \sin\psi_1 = HH_1 \sin\varphi(N_1\,\delta\rho_1 + N\,\delta\rho) = HH_1 \sin\varphi\,\delta u_1.$$

Si dans cette équation on fait ψ_1 égal à $-\psi$, la courbe δs sera bissectrice de l'angle 2ψ que l'une des courbes du faisceau (u) fait avec une quelconque des courbes du faisceau (u_1) en leurs points d'intersection situés sur cette bissectrice; on aura donc l'équation de cette bissectrice en divisant membre à membre l'équation (6) par l'équation (8). On obtient ainsi

$$(9) \qquad \frac{K}{K_1} = -\frac{M_1\,\delta\rho_1 + M\,\delta\rho}{N_1\,\delta\rho_1 + N\,\delta\rho} = -\frac{\delta u}{\delta u_1}.$$

Cette équation est celle de la bissectrice intérieure de l'angle 2ψ; l'équation de la bissectrice extérieure se déduit de la précédente, en y changeant le signe du second membre; on a donc la double équation différentielle suivante :

$$(9') \qquad \left(\frac{N_1}{K_1} \pm \frac{M_1}{K}\right)\delta\rho_1 + \left(\frac{N}{K_1} \pm \frac{M}{K}\right)\delta\rho = 0,$$

dont les signes supérieurs se rapportent à la bissectrice intérieure et les signes inférieurs à la bissectrice extérieure de l'angle du réseau.

5. *Équation différentielle de la double bissectrice.* — Il résulte de ce que nous venons de dire que l'équation (9) élevée au carré donnera le système des deux bissectrices des courbes (*u*) et (*u*₁). Cette équation, quand on remplace K et K₁ par leurs valeurs tirées du type (4), et que l'on représente par ν et ν_1 les valeurs des coefficients différentiels $\frac{d\rho_1}{d\rho}$ tirés des équations (*u*) et (*u*₁), prend la forme suivante :

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned}&[2G^2 + H_1^2(\nu+\nu_1)]\,\delta\rho_1^2 + 2[H^2 - H_1^2\nu\nu_1]\,\delta\rho\,\delta\rho_1\\ &\qquad - [2G^2\nu\nu_1 + H^2(\nu+\nu_1)]\,\delta\rho^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

On peut aussi lui donner une autre forme non moins commode; car on a la relation

$$\cos\zeta = \frac{G^2}{HH_1},$$

et l'on peut introduire, pour représenter chaque courbe (*u*) et (*u*₁), les rapports de $d\sigma_1$ à $d\sigma$ tirés des équations (2), (1) et (7), rapports que nous représentons par n, n_1 : alors l'équation (B) prend la forme

$$(\mathrm{B}_1)\quad \left\{\begin{aligned}&(2\cos\zeta + n + n_1)\,\delta\sigma_1^2 + 2(1 - nn_1)\,\delta\sigma\,\delta\sigma_1\\ &\qquad - (2nn_1\cos\zeta + n + n_1)\,\delta\sigma^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

La forme de ces équations est rationnelle en tant que ν, ν_1 dans la première et n, n_1 dans la seconde sont rationnels; mais cette condition, qui est suffisante, n'est pas nécessaire: car, si les valeurs de ν et ν_1, ou bien les valeurs de n, n_1, sont données par une équation rationnelle du second degré en $\frac{d\rho_1}{d\rho}$ ou en $\frac{d\sigma_1}{d\sigma}$, les valeurs de ν et ν_1 seront conjuguées : il en sera de même des valeurs de n, n_1; donc la somme des deux premières ou des deux secondes sera rationnelle, le produit des deux premières ou des deux secondes sera aussi rationnel; par conséquent, la forme des équations (B) et (B₁) restera rationnelle dans cette hypothèse.

Si le système des coordonnées curvilignes ρ et ρ_1 est orthogonal,

les termes en G^2 de l'équation (B) et les termes en $\cos\varphi$ de l'équation (B_1) disparaissent et l'on a alors deux équations plus simples de la double bissectrice.

4. *Réalité des racines.* — Cherchons les conditions de réalité des racines des équations (B) ou (B_1). Si l'on résout cette dernière par rapport au coefficient différentiel $\frac{\delta\sigma_1}{\delta\sigma}$, on trouve deux valeurs, chacune d'elles correspondant à l'une des deux bissectrices, de sorte que si l'on pose

$$(10)\quad \begin{cases} P = -(1 - nn_1), \\ Q = (nn_1 + 1)\cos\varphi + (n + n_1)]^2 + (1 - nn_1)^2 \sin^2\varphi, \\ T = 2\cos\varphi + (n + n_1); \end{cases}$$

on aura la double valeur suivante de ce coefficient différentiel :

$$\frac{\delta\sigma_1}{\delta\sigma} = \frac{P}{T} \pm \frac{\sqrt{Q}}{T}.$$

La composition des fonctions P, Q, T prouve que les deux bissectrices des deux courbes (u) et (u_1) sont réelles, non seulement lorsque les courbes (u) et (u_1) sont réelles, mais encore lorsqu'elles sont imaginaires, pourvu qu'elles soient conjuguées entre elles, ce qui arrivera toujours lorsque ces deux courbes seront données par une équation du second degré, ayant les coefficients réels; on a donc cette proposition.

Théorème. — *Étant donnés deux faisceaux de courbes réelles, ou imaginaires conjuguées, les bissectrices curvilignes du réseau formé par ces deux faisceaux sont toujours réelles.*

5. *Orthogonalité des bissectrices.* — Cette orthogonalité résulte de ce fait géométrique que les bissectrices de deux angles supplémentaires se coupent sous angle droit; mais, dans le cas actuel, elle doit ressortir de notre analyse, parce que les courbes peuvent être imaginaires.

Soient B et B_1 les deux bissectrices, intérieure et extérieure, des

angles des deux courbes C et C_1 des faisceaux (u) et (u_1); soient γ et γ_1 les angles que la première et la seconde bissectrice forment avec l'arc coordonné $d\sigma$: la condition d'orthogonalité est exprimée par la condition

$$1 + \operatorname{tang}\gamma \operatorname{tang}\gamma_1 = 0;$$

or, si l'on représente par m, m_1 les rapports $\frac{\partial\sigma_1}{\partial\sigma}$ des deux courbes B et B_1, on a les relations

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{m \sin\varphi}{1 + m\cos\varphi}, \quad \operatorname{tang}\gamma_1 = \frac{m_1 \sin\varphi}{1 + m_1\cos\varphi};$$

d'après cela, la condition précédente deviendra

$$(10_1) \qquad 1 + (m + m_1)\cos\varphi + mm_1 = 0.$$

Or, d'après l'équation (B_1), on a

$$m + m_1 = -\frac{2(1 - nn_1)}{T}, \quad mm_1 = -\frac{2nn_1\cos\varphi + (n + n_1)}{T},$$

de sorte que, si l'on porte ces valeurs dans l'équation (10_1), on trouve la condition

$$(11) \qquad T = 2\cos\varphi + (n + n_1),$$

laquelle est une identité par suite de la troisième des équations (10).

Il résulte de là que les deux bissectrices B et B_1 sont orthogonales entre elles.

Si l'on considère l'ensemble des bissectrices intérieures et extérieures des angles du réseau (u, u_1), on a un second réseau jouissant de cette propriété que tous les angles de ce réseau sont droits, et l'élément du réseau est un quadrilatère curviligne dont les angles sont droits.

6. *Généralité des équations de la double bissectrice.* — Les équa-

tions (B), se rapportant à un système quelconque de coordonnées curvilignes, renferment, par cela même, les équations des bissectrices dans chaque système particulier de coordonnées et le passage des unes aux autres se fait avec la plus grande facilité, à cause de la forme significative que nous avons donnée aux équations (B) et (B_1). C'est ce que nous allons montrer par l'application suivante.

Équations des bissectrices dans le système cartésien. — Dans ce système, l'équation de la surface, quand on représente par p et q les dérivées de z par rapport à x et à y, s'écrit sous la forme

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Or les courbes coordonnées sont $x = \rho$, $y = \rho_1$, de sorte que le déplacement effectué sur la surface est

$$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2;$$

par suite, les valeurs des paramètres H, H_1, G, sont données par les relations

$$H^2 = (1 + p^2), \quad H_1^2 = (1 + q^2), \quad G^2 = pq.$$

En faisant ces substitutions dans l'équation (B_1), on trouve l'équation suivante :

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} & [2pq + (1 + q^2)(m + m_1)]\,dy^2 \\ & \quad + 2[1 + p^2 - (1 + q^2)(mm_1)]\,dy\,dx \\ & \quad - [2pqmm_1 + (1 + p^2)(m + m_1)]\,dx^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

qu'on ne pourrait établir directement sans de longs calculs.

7. *Intégration des équations de la double bissectrice.* — Il se présente deux cas : ou bien l'équation (B) se décompose en deux équations du premier degré intégrables, ou bien l'intégration ne peut s'effectuer séparément.

Dans le premier cas, chacune des équations étant intégrée, on a les

deux intégrales suivantes en termes finis, v et v_1 étant des constantes arbitraires,

$$f(\rho, \rho_1) = v, \quad f_1(\rho, \rho_1) = v_1;$$

et les variations de v et v_1 donnent le réseau complet des bissectrices.

Dans le second cas, l'intégration de l'équation différentielle du second degré conduira à une intégrale unique

$$F(\rho, \rho_1, a) = 0,$$

dans laquelle a est la constante d'intégration; mais cette constante y entrera élevée au carré, de sorte que l'on aura une équation du second degré en a qui donnera deux valeurs de a : a_1 et a_2 correspondant à un même point (ρ, ρ_1); et, suivant que l'on prendra l'une ou l'autre de ces valeurs de a, on aura une première branche ou une seconde branche d'une même courbe, ou même deux courbes distinctes. On aura donc, par la variation du point que l'on considère sur la surface, le réseau complet des bissectrices curvilignes.

Pour effectuer plus facilement l'intégration de l'équation (B), on procédera de la manière suivante. Ou bien les équations des faisceaux (u) et (u_1) sont données, ou peuvent être obtenues sous forme finie, ou bien ces équations ont essentiellement la forme différentielle. Dans le premier cas, on prendra le système de coordonnées curvilignes provenant des variations de u et de u_1, et, si l'on représente par β, β_1 les paramètres différentiels linéaires de ce système, les équations de la bissectrice seront données par la double forme suivante :

$$\beta du \pm \beta_1 du_1 = 0,$$

dans laquelle les variables seront bien souvent séparées; dans ce cas, l'intégration est ramenée aux quadratures. Dans le second cas, comme les rapports ν et ν_1 des deux courbes (u) et (u_1), donnés par les équations de ces courbes, entrent seuls dans l'équation (B), on voit que l'intégration de cette équation n'exige pas que l'on connaisse, sous forme finie, les courbes (u) et (u_1); alors la forme de l'équation (B) ne peut se simplifier, et cette forme s'impose nécessairement; c'est pour cela

qu'il nous a été nécessaire de calculer l'équation (B) d'une manière générale. On intégrera cette équation sans recourir aux intégrales des équations différentielles C et C_1.

8. *Applications des théories précédentes.* — Nous allons résoudre quelques questions au moyen de notre analyse.

Problème I. — *Étant donné le réseau formé sur une sphère par deux faisceaux de plans tournant autour de deux diamètres orthogonaux, trouver les bissectrices du réseau.*

Soient les équations de la sphère et des deux faisceaux de plans :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y = \rho z, \quad x = \rho_1 z,$$

dans lesquelles les paramètres variables sont ρ et ρ_1. Prenons pour système de coordonnées ρ et ρ_1; il faut différentier les trois équations en faisant aussi varier ρ et ρ_1, et déduire de ces trois équations différentielles les valeurs de dx, dy, dz en fonction de ρ, ρ_1, $d\rho$, $d\rho_1$; on obtient ainsi, en posant

$$D = 1 + \rho^2 + \rho_1^2,$$

les trois relations

$$dz = -\frac{a}{D^{\frac{3}{2}}}(\rho\, d\rho + \rho_1\, d\rho_1),$$

$$dx = -\frac{a\rho_1}{D^{\frac{3}{2}}}(\rho\, d\rho + \rho_1\, d\rho_1) + \frac{a\, d\rho_1}{D^{\frac{1}{2}}},$$

$$dy = -\frac{a\rho}{D^{\frac{3}{2}}}(\rho\, d\rho + \rho_1\, d\rho_1) + \frac{a\, d\rho}{D^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on fait la somme des carrés et qu'on ajoute, on trouve l'expression du carré du déplacement effectué sur la sphère

$$\frac{ds^2}{a^2} = \frac{d\rho^2}{D^2}(1 + \rho_1^2) + \frac{d\rho_1^2}{D^2}(1 + \rho^2) - 2\frac{d\rho\, d\rho_1}{D^2}\rho\rho_1.$$

D'après cela, les équations des deux bissectrices du réseau sont

$$\frac{d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \pm \frac{d\rho_1}{\sqrt{1+\rho_1^2}},$$

dont les intégrales, en représentant par v les constantes d'intégration, sont

$$\rho + \sqrt{1+\rho^2} = v\left(\rho_1 \pm \sqrt{1+\rho_1^2}\right).$$

Si l'on remplace ρ et ρ_1 par leurs valeurs tirées des équations des faisceaux des plans et qu'on chasse les radicaux, on obtient les deux séries de surfaces coniques,

$$x^2 + y^2 \pm \frac{v^2+1}{v} xy - \frac{v^2-1}{4v^2} z^2 = 0,$$

lesquelles déterminent sur la surface un réseau orthogonal d'une double série de coniques sphériques. Le signe supérieur se rapporte à une série, et le signe inférieur à l'autre série.

La généralité de la solution n'est pas altérée quoique les deux constantes soient représentées par une seule lettre v, parce que les deux équations contenues dans chacune des deux formules précédentes doivent être considérées séparément. Si ces deux équations devaient être considérées simultanément, on représenterait les constantes par deux lettres distinctes.

9. Problème II. — *Bissectrices du réseau des génératrices du paraboloïde hyperbolique.*

Soient les équations du paraboloïde hyperbolique et des deux faisceaux de plans qui coupent cette surface suivant des droites

$$2\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \rho, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \rho_1,$$

ρ et ρ_1 étant les paramètres variables. En opérant comme précédemment, on obtient les équations

$$dx = \frac{a}{2}(d\rho + d\rho_1), \quad dy = \frac{b}{2}(d\rho_1 - d\rho), \quad dz = \frac{c}{2}(\rho_1\, d\rho + \rho\, d\rho_1);$$

si l'on pose, pour abréger,

$$a^2 + b^2 = m^2 c^2, \quad a^2 - b^2 = n^2 c^2,$$

les paramètres différentiels sont

$$H^2 = \frac{c^2}{4}(m^2 + \rho_1^2), \quad H_1^2 = \frac{c^2}{4}(m^2 + \rho^2), \quad G^2 = \frac{c^2}{4}(n^2 + \rho\rho_1).$$

D'après ces expressions, les équations de la double bissectrice sont

$$\frac{d\rho}{\sqrt{m^2 + \rho^2}} \pm \frac{d\rho_1}{\sqrt{m^2 + \rho_1^2}} = 0,$$

dont les intégrales, en représentant par γ la constante arbitraire, peuvent être mises sous la forme rationnelle

$$\rho^2 + \rho_1^2 \pm \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma}\rho\rho_1 = \frac{\gamma^2 - 1}{4\gamma^2} m^2.$$

Si l'on passe aux coordonnées cartésiennes, on obtient les deux équations

$$(\gamma + 1)^2 \frac{x^2}{a^2} - (\gamma - 1)^2 \frac{y^2}{b^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{4\gamma} m^2,$$

$$(\gamma + 1)^2 \frac{y^2}{b^2} - (\gamma - 1)^2 \frac{x^2}{a^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{4\gamma} m^2.$$

Les demi-axes de ces deux coniques étant représentées par A, B, A_1, B_1, on a les relations

$$A^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{m^2 a^2}{4\gamma}, \quad B^2 = \frac{\gamma + 1}{1 - \gamma} \frac{m^2 b^2}{4\gamma},$$

$$A_1^2 = \frac{\gamma + 1}{1 - \gamma} \frac{m^2 a^2}{4\gamma}, \quad B_1^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{m^2 b^2}{4\gamma}.$$

10. Problème III. — *Trouver les bissectrices du réseau formé par le double système de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.*

Ce problème a été déjà résolu par nous dans notre Analyse [1], à laquelle nous renvoyons le lecteur; mais cette question est susceptible d'une généralisation importante résultant de nos équations (B). Cette généralisation consiste en ce que la solution que nous avons trouvée s'étend à toutes les surfaces du second ordre, bien que l'hyperboloïde à une nappe soit la seule des trois surfaces du second degré, douées d'un centre, qui possède des génératrices rectilignes. Les deux autres surfaces n'ont pas de génératrices rectilignes réelles; mais dans la géométrie des symboles imaginaires elles possèdent deux séries de génératrices rectilignes imaginaires; or, comme les deux génératrices imaginaires sont conjuguées entre elles, il résulte qu'elles possèdent, d'après notre théorème du n° 4, deux séries de bissectrices réelles du réseau de ces deux séries de droites imaginaires. Donc l'intégrale que nous avons donnée fournit également les bissectrices des angles formés par la double série de génératrices imaginaires de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à deux nappes.

§ II.

11. *Questions inverses.* — L'équation (B_1) des bissectrices de l'angle des deux courbes (C) et (C_1) appartenant aux faisceaux (u) et (u_1) met en relief les coefficients différentiels n, n_1 des deux courbes (C) et (C_1) et les coefficients différentiels m_0 et m_1 des deux bissectrices; par conséquent, cette équation permet de traiter les questions inverses et donne les conditions de chaque problème avec facilité.

Problème IV. — *Étant donnée l'équation différentielle du second degré relative à deux courbes conjuguées, trouver tous les couples de courbes, tracées sur la même surface, ayant les mêmes bissectrices que les courbes données.*

Soit l'équation des deux courbes C et C_1 donnée sous la forme différentielle

$$(c) \qquad R_1 d\sigma_1^2 + 2L d\sigma_1 d\sigma + R d\sigma^2 = 0,$$

[1] Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque*, p. 115. Paris, Gauthier-Villars, 1869.

dans laquelle R, R_1, L sont des fonctions de ρ et de ρ_1; soit l'equation de deux autres courbes E, E_1 donnée sous la forme

$$(e) \qquad (R_1 + A_1)\,d\sigma_1^2 + 2(L + B)\,d\sigma\,d\sigma_1 + (R + A)\,d\sigma^2 = 0,$$

dans laquelle A, A_1, B sont des fonctions arbitraires de ρ et de ρ_1: on se propose de déterminer ces fonctions de telle sorte que les courbes E, E_1 aient les mêmes bissectrices que les courbes C et C_1.

L'équation des bissectrices des courbes C et C_1 est, d'après l'équation (B_1),

$$(R_1 \cos\varphi - L)\,\delta\sigma_1^2 + (R_1 - R)\,\delta\sigma_1\,\delta\sigma - (R \cos\varphi - L)\,\delta\sigma^2 = 0,$$

et l'équation des bissectrices E et E_1 est, d'après la même équation (B_1),

$$\begin{aligned}&[(R_1 + A_1)\cos\varphi - (L + B)]\,\delta\sigma_1^2\\ &\quad + (R_1 - R + A_1 - A)\,\delta\sigma_1\,\delta\sigma - [(R + A)\cos\varphi - (L + B)]\,\delta\sigma^2 = 0;\end{aligned}$$

il suffit de poser les conditions

$$A_1 \cos\varphi - B = 0, \quad A_1 - A = 0, \quad A \cos\varphi - B = 0,$$

pour que les deux équations précédentes soient identiques. Ces conditions sont aussi nécessaires, parce que l'équation des courbes (E) et (E_1) ne comporte que deux fonctions arbitraires. De ces conditions on déduit les relations

$$A = A_1 = \frac{B}{\cos\varphi};$$

de la résulte qu'une seule de ces fonctions reste arbitraire. Soit A cette fonction, l'équation des courbes E, E_1 sera donc

$$(e_1) \qquad (R_1 + A)\,d\sigma_1^2 + 2(L + A \cos\varphi)\,d\sigma_1\,d\sigma + (R + A)\,d\sigma^2;$$

or, si l'on a égard à la relation (3) du n° 1, cette équation peut s'écrire sous la forme

$$(e_2) \qquad A\,ds^2 + R_1\,d\sigma_1^2 + 2L\,d\sigma_1\,d\sigma + R\,d\sigma^2 = 0,$$

Comme la fonction A reste arbitraire, elle peut prendre toutes les formes possibles, et à chaque forme correspond, après intégration de l'équation, un réseau complet de lignes, telles que E et E_1, qui admettent le même réseau de bissectrices que le réseau correspondant aux courbes C et C_1; on a donc cette proposition :

THÉORÈME. — *Il existe une infinité de réseaux de courbes tracées sur une surface, lesquels possèdent un seul et même réseau de bissectrices tracées sur la même surface.*

12. COROLLAIRES DE L'ANALYSE PRÉCÉDENTE. — *Corollaire I.* — Si les courbes C et C_1 ne sont autres que les courbes coordonnées ρ et ρ_1, l'équation (c) est

$$d\sigma\, d\sigma_1 = 0,$$

et l'équation (e_1) se réduit à

$$A\, d\sigma_1^2 + 2(1 + A\cos\varphi)\, d\sigma_1\, d\sigma + A\, d\sigma^2;$$

de sorte que, si l'on représente par $2AM$ le coefficient de $d\sigma_1\, d\sigma$, on a les deux valeurs suivantes du rapport $\frac{d\sigma_1}{d\sigma}$:

$$\left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_0 = -M + \sqrt{M^2 - 1}, \quad \left(\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\right)_1 = \frac{1}{-M + \sqrt{M^2 - 1}}.$$

Maintenant, si l'on représente par $\pm\Psi(\rho, \rho_1)$ la première valeur, la seconde valeur sera $\pm\frac{1}{\Psi(\rho, \rho_1)}$; les équations des deux courbes (e) sont, en prenant simultanément les signes supérieurs ou les signes inférieurs,

$$(\varepsilon) \qquad d\sigma_1 = \pm\frac{1}{\Psi(\rho, \rho_1)}\, d\sigma, \quad d\sigma_1 = \pm\Psi(\rho, \rho_1)\, d\sigma,$$

dans lesquelles $\Psi(\rho, \rho_1)$ est une fonction arbitraire des coordonnées ρ et ρ_1.

Ceci démontre que le nombre des systèmes de courbes (e), ayant même bissectrice que les lignes coordonnées ρ et ρ_1, est infini et représenté par l'ensemble des équations précédentes, dont le produit,

membre à membre, donne l'équation invariable des deux bissectrices, malgré la variation de Ψ.

Corollaire II. — La première équation double (ε) représente deux courbes qui coupent harmoniquement les courbes coordonnées ρ et ρ_1, c'est-à-dire que les quatre tangentes au point d'intersection (ρ, ρ_1), forment un faisceau harmonique dont le rapport harmonique au point d'intersection des quatre courbes est une fonction des coordonnées de ce point marqué par $\pm \frac{1}{\Psi(\rho, \rho_1)}$ et la seconde équation double (ε) représente deux autres courbes qui coupent harmoniquement les courbes coordonnées ρ et ρ_1, le rapport harmonique étant $\pm \Psi(\rho, \rho_1)$ inverse du précédent; et de ce que nous venons de dire, il résulte qu'en ce point les deux faisceaux ont deux courbes communes ρ et ρ_1 qui sont les lignes coordonnées et que leurs conjuguées harmoniques dans le premier et second faisceau, comparées chacune à chacune, ont les mêmes courbes bissectrices que les lignes coordonnées ρ et ρ_1.

Cette propriété se vérifie facilement pour des lignes droites tracées dans un plan.

§ III.

DES LIGNES DE COURBURE CONSIDÉRÉES COMME BISSECTRICES DE DIVERS RÉSEAUX.

15. Problème V. — *Trouver l'équation générale des lignes de courbure par la condition qu'elles soient bissectrices du réseau formé par le double système des lignes asymptotiques d'une surface.*

On définit la ligne asymptotique d'une surface la courbe tracée sur cette surface, sous cette condition que la courbure de la courbe projetée sur la normale à la surface donne une projection nulle. L'expression de la courbure normale $\frac{1}{\mathcal{R}}$ d'une courbe ds dans le système des coordonnées ρ et ρ_1 lorsqu'on représente par $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\gamma_1}$ les courbures normales des lignes $d\sigma$, $d\sigma_1$ et par $\frac{1}{l}$ la composante normale de la courbure inclinée de l'une de ces courbes par rapport à l'autre, a la forme

simple que nous avons établie dans notre *Analyse des courbes tracées sur une surface*, p. 70,

$$(\mathcal{R})\qquad \frac{ds^2}{\mathcal{R}} = \frac{d\sigma_1^2}{\gamma_1} + \frac{2\,d\sigma\,d\sigma_1}{l} + \frac{d\sigma^2}{\gamma}.$$

Cette équation, dans laquelle ds, $d\sigma$, $d\sigma_1$ sont proportionnels aux sinus des angles φ, α, α_1 que les lignes coordonnées font entre elles et que ds fait avec $d\sigma_1$ et $d\sigma$ est celle d'une conique dans laquelle le rayon vecteur issu du centre et les demi-axes seraient proportionnels à $\sqrt{\mathcal{R}}$, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\gamma_1}$. Elle montre que, les deux axes étant bissecteurs de l'angle que deux rayons vecteurs égaux font entre eux, les plans des deux sections normales à la surface, correspondant aux rayons de courbure maximum et minimum, bissectent l'angle des plans de deux sections normales correspondant à des rayons de courbure égaux, et par conséquent l'angle de deux sections normales ayant leurs courbures nulles. Or les sections normales à courbure maxima et minima ont la même direction, au point que l'on considère, que les deux lignes de courbure passant en ce point; et les sections normales dont les courbures sont nulles ont même direction en ce point que les lignes asymptotiques. Il résulte de là que les lignes de courbure sont bissectrices des lignes asymptotiques et aussi des lignes qui ont des courbures normales égales.

Ces principes étant posés, l'équation des lignes asymptotiques s'obtient en faisant dans l'équation $(\mathcal{R})$ $\frac{1}{\mathcal{R}}$ nul; on obtient ainsi

$$(a)\qquad \frac{d\sigma_1^2}{\gamma_1} + \frac{2\,d\sigma\,d\sigma_1}{l} + \frac{d\sigma^2}{\gamma} = 0;$$

cette équation donne

$$n + n_1 = -\frac{2\gamma_1}{l},\quad nn_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma},$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (B_1), on trouve

$$\left(\frac{\cos\varphi}{\gamma_1} - \frac{1}{l}\right)\delta\sigma_1^2 + \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma}\right)\delta\sigma_1\,\delta\sigma - \left(\frac{\cos\varphi}{\gamma} - \frac{1}{l}\right)\delta\sigma^2 = 0,$$

qui est l'équation des lignes de courbure dans un système quelconque de coordonnées, comme nous l'avons déjà établi dans notre *Analyse*, p. 155, par une démonstration directe.

Dans le système cartésien, l'équation des lignes asymptotiques est

$$(a) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2 z}{dx\, dy} dx\, dy + \frac{d^2 z}{dy^2} dy^2 ;$$

en portant les valeurs de la somme et du produit des racines de cette équation dans l'équation (*b*) du n° **6**, et en représentant par r, s, t les dérivées secondes de z par rapport à x, x par rapport à x, y par rapport à y, y, on trouve l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &2pqt - (1 + q^2) s \,\delta y^2 \\ &\quad + [(1 + p^2) t - (1 + q^2) r] \,\delta y\, \delta x - (pqr - (1 + p^2) s) \,\delta x^2 = 0, \end{aligned}$$

qui est l'équation des lignes de courbure propre au système cartésien.

14. *Conséquences.* — Toutes les propriétés connues et les propriétés nouvelles des lignes de courbure se présentent maintenant comme conséquences de notre théorie des lignes bissectrices d'un réseau de lignes tracées sur une surface. Voici l'énumération des principales de ces propriétés :

1° Les racines de l'équation des lignes de courbure sont réelles (n° **4**).

2° Les lignes de courbure d'une surface forment un réseau orthogonal (n° **5**).

3° Les lignes de courbure d'une surface sont bissectrices de l'angle des lignes asymptotiques imaginaires. Cela résulte du théorème énoncé à la fin du n° **4** et de la forme de l'équation des lignes asymptotiques (n° **13**), lesquelles en chaque point sont conjuguées entre elles.

4° L'équation (B) des lignes de courbure de l'hyperboloïde à une nappe (n° **10**) représente aussi les lignes de courbure des deux autres surfaces du second degré, données de centres; et l'équation des lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique, obtenue par le même procédé

(n° **9**), représente aussi les lignes de courbure du paraboloïde elliptique.

5° Les lignes de courbure sont aussi bissectrices des réseaux, en nombre infini, donnés par les lignes qui ont même courbure normale, constante ou variable avec les coordonnées du point; ces réseaux sont composés de lignes réelles ou imaginaires; mais une catégorie d'entre eux sera toujours réelle par suite de la valeur que l'on donnera à la courbure normale : cela résulte de l'identité de forme de l'équation (e_2) du n° **11** et de l'équation $(\mathcal{R})$ du n° **13**, ainsi que de la discussion des racines de ces équations.

6° Il est toujours permis, quand on répudie de la Géométrie les symboles imaginaires, de considérer les lignes de courbure d'une surface comme bissectrices d'un réseau réel de courbes tracées sur la surface. Cela résulte de la proposition 5° du présent Mémoire.

La doctrine que nous venons de développer dans ce numéro et dans ceux qui précèdent sera corroborée par la solution de la question suivante.

15. Problème VI. — *Bissectrices du réseau formé sur la surface de l'ellipsoïde par deux séries de plans parallèles, perpendiculaires au même plan principal et coupant chacun des axes situés dans ce plan sous deux angles supplémentaires.*

Soient les équations de l'ellipsoïde et des deux faisceaux de plans

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad y=\lambda(x-\rho),\quad y=-\lambda(x-\rho_1),$$

dans lesquelles ρ et ρ_1 sont les paramètres variables.

Si l'on fait usage de l'équation (b), on aura

$$\nu+\nu_1=0,\quad \nu\nu_1=-\lambda^2,$$

de sorte que, en ayant égard à ces relations et aux valeurs de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ tirées de l'équation de l'ellipsoïde, l'équation des deux bissectrices

sera

$$\frac{c^2xy}{a^2b^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\left[\frac{c^2-(1+\lambda^2)a^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{\lambda^2c^2-(1+\lambda^2)b^2}{b^2}\frac{y^2}{b^2}+(1+\lambda^2)\right]\frac{dy}{dx}+\frac{c^2\lambda^2xy}{a^2b^2}=0.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{c^2-(1+\lambda^2)a^2}{a^2}=\frac{1}{A^2},\quad \frac{\lambda^2c^2-(1+\lambda^2)b^2}{b^2}=\frac{1}{B^2},$$

elle deviendra

$$\frac{c^2xy}{a^2b^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\left[\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+(1+\lambda^2)\right]\frac{dy}{dx}+\frac{c^2\lambda^2}{a^2b^2}xy=0.$$

Cette équation ne nous paraît pas intégrable d'une manière générale, quoique nous sachions déterminer une solution particulière ; mais, si l'on suppose que les deux faisceaux de plans sont ceux des sections circulaires de l'ellipsoïde et que l'on suppose que c est le demi-axe moyen, ce qui fournit la relation

$$\lambda^2=\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2},$$

on a les conditions

$$1+\lambda^2=\frac{c^2}{a^2}\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2},\quad \frac{1}{A^2}=\frac{c^2}{a^2}\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2},\quad \frac{1}{B^2}=-\frac{c^2}{a^2b^2};$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$\frac{xy}{B^2}\frac{dy^2}{dx^2}-\left[\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+(1+\lambda^2)\right]\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{A^2}=0,$$

laquelle est intégrable. En effet, cette équation est celle de Monge représentant la projection des lignes de courbure de l'ellipsoïde sur le plan des x, y, lequel, dans notre hypothèse, est le plan de la section principale moyenne.

Cette équation s'intègre d'après la méthode due à Monge lui-même, laquelle il est inutile de développer, parce qu'elle est classique.

Nous n'avons donc qu'à signaler les propositions qui résultent de cette analyse.

THÉORÈME I. — *Les bissectrices du réseau formé par les sections circulaires sur une surface du second degré douée de centre sont les lignes de courbure de cette surface.*

Les plans des sections circulaires de l'ellipsoïde sont perpendiculaires au plan de la section principale moyenne; perpendiculairement au plan de la section maximum, il existe une double série de sections circulaires imaginaires; mais, comme ces sections sont conjuguées entre elles, il en résulte que les bissectrices de ce réseau de courbes imaginaires sont réelles et ne sont pas distinctes des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

De même, perpendiculairement au plan de la section minimum de l'ellipsoïde, il existe une double série de sections circulaires imaginaires conjuguées, et les bissectrices de ce troisième réseau sont encore les lignes de courbure de l'ellipsoïde; et, comme les mêmes propriétés existent pour les deux autres surfaces du second degré, douées de centre, on a aussi la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Perpendiculairement à l'un des trois axes principaux d'une surface de second degré douée de centre, il existe une double série de sections circulaires, réelles ou imaginaires conjuguées; les bissectrices du réseau formé par une quelconque de ces trois doubles séries sont les lignes de courbure de cette surface.*

Pour se rendre compte de l'existence de ces trois doubles séries de sections circulaires, il suffit de considérer une sphère doublement tangente à la surface du second degré que l'on considère, par exemple à l'ellipsoïde. Si la sphère doublement tangente a son centre situé sur le plan de la section principale moyenne, cette sphère coupe la surface suivant deux sections circulaires réelles, si le double contact de la sphère et de l'ellipsoïde est réel. Si la sphère, doublement tangente à l'ellipsoïde, a son centre situé sur l'un des deux autres plans principaux de l'ellipsoïde, elle coupe la surface suivant deux sections circu-

laires imaginaires conjuguées, lors même que le double contact de la sphère et de l'ellipsoïde est réel [1].

Il existe deux théorèmes semblables aux précédents pour les surfaces du second degré dépourvues de centre.

THÉORÈME III. — *Les bissectrices du réseau formé par les sections circulaires des surfaces du quatrième degré qui sont les transformées, par rayons vecteurs réciproques, des surfaces du second degré, forment le réseau des lignes de courbure de ces surfaces du quatrième degré.*

16. *Remarques.* — La question que nous venons de traiter justifie la forme de l'équation (e_2) du n° **11**, ainsi que le corollaire V du n° **14**; elle montre, de plus, la fécondité de la méthode des bissectrices pour la détermination des lignes de courbure d'une surface.

En effet, les sections circulaires ellipsoïdales n'appartiennent ni à la catégorie des lignes asymptotiques, ni à la catégorie des courbes dont le rayon de courbure normale est constant, mais bien à la classe des lignes dont le rayon de courbure normale est une fonction déterminée des coordonnées du point. Pour les lignes circulaires ellipsoïdales, ce rayon est proportionnel à l'aire de la section faite par un plan diamétral parallèlement au plan tangent [2], de sorte que l'on a

$$R = b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Donc, en chaque point d'intersection de deux sections circulaires appartenant à deux séries différentes, les bissectrices des angles, intérieur et extérieur, des deux tangentes coïncident avec les tangentes aux lignes de courbure en ce point.

Il suffira donc généralement, pour connaître les lignes de courbure d'une surface, de connaître les deux séries de courbes dont le rayon de courbure normale est la même fonction des coordonnées du point.

---

(1) Voir nos *Recherches sur les surfaces du second ordre*, Ire Partie, p. 32 et suivantes.

(2) *Ibid.*, IIe Partie, p. 54.

Commentaire à la théorie mathématique du jeu de billard;

PAR M. H. RESAL.

§ I. — GÉNÉRALITÉS.

1. Coriolis doit être considéré comme étant le créateur de cette théorie, quoiqu'il ait été précédé, dans la solution d'un problème spécial dont nous nous occuperons plus loin, par Jean-Albert Euler [1].

Le remarquable Ouvrage de Coriolis sur ce sujet a paru en 1835, mais il a fait peu de sensation, peut-être même à cause de son titre; car les analystes ne sont généralement pas des joueurs de billard et inversement. Mais il y a dans cet Ouvrage des aperçus nouveaux et des méthodes de calculs et d'intégrations spéciales qui peuvent recevoir leur application dans bien des circonstances.

Si nous nous permettons de commenter l'Ouvrage dont il s'agit, ce n'est pas seulement en vue d'apporter des simplifications dans les démonstrations, mais c'est surtout parce que nous différons avec Coriolis sur la manière d'évaluer la force vive perdue dans le choc de deux corps imparfaitement élastiques. Ainsi, par exemple, dans le calcul de l'effet d'un coup de queue horizontal, Coriolis exprime que, après le choc, la force vive totale est une fraction de la force vive initiale de la queue, fraction qu'il a déterminée expérimentalement, et il ne tient

(1) Fils aîné (1734-1800) du célèbre géomètre Léonard Euler.

pas ainsi compte du terme auquel donne lieu l'action mutuelle tangentielle développée au contact de la queue et de la bille.

L'équation des forces vives, telle que nous l'établissons, conduit à des résultats beaucoup plus simples, et qui sont même d'une simplicité à laquelle nous étions loin de nous attendre.

2. *Rappel des principes de la théorie du choc des corps.* — Lorsque deux corps solides en mouvement, l'un par rapport à l'autre, viennent à se rencontrer, il se produit ce que l'on appelle un *choc* ou une *percussion*. Quoique la durée d'un choc soit très courte et presque inappréciable, elle se divise cependant en deux parties bien distinctes. Dans la première, les corps se compriment ou se refoulent jusqu'au moment où leur déformation et, par suite, leur action mutuelle normale au contact atteignent leur maximum. Dans la seconde partie, qui suit cet instant, les corps reviennent graduellement à une forme plus ou moins différente de leur forme primitive et tendent finalement à se séparer en vertu de l'énergie plus ou moins grande de leur force de ressort.

Pendant le choc, les molécules des corps ne peuvent éprouver que des déplacements du même ordre de grandeur que sa durée, déplacements que l'on peut, par suite, négliger sans erreur sensible. Mais, à la fin du choc, leurs vitesses peuvent être très différentes, soit en grandeur, soit en direction, de ce qu'elles étaient au commencement ; d'où il suit que les actions moléculaires développées dans les corps, pendant le choc, ont une intensité comparablement plus considérable que celle des forces qui produisent les phénomènes ordinaires continus, tels que la pesanteur. On peut donc faire abstraction de ces dernières forces pendant la durée du choc.

A l'instant de la plus grande compression, les composantes normales des vitesses des molécules au contact des deux corps sont égales, et ces corps se comportent par suite, dans cet instant, l'un par rapport à l'autre, comme deux solides invariables qui peuvent d'ailleurs glisser l'un sur l'autre.

S'il y a glissement pendant le choc, il se développera au contact une action tangentielle qui, généralement, atteindra le frottement de glissement et dont on devra tenir compte.

Comme, même en faisant abstraction des résistances passives déve-

loppées au contact, il y a une consommation de travail pour produire la déformation finale, la force vive totale des corps à la fin du choc sera nécessairement inférieure à ce qu'elle était au commencement, et nous devrons par suite commencer par déterminer la valeur de la différence.

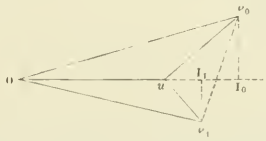
5. *Évaluation de la perte de force vive éprouvée par deux corps choquants à la fin du choc.* — Soient (*fig.* 1), pour une molécule de masse m de l'un ou l'autre des deux corps,

Ov_0, Ov_1, Ou les droites, menées par un point O, qui représentent respectivement les vitesses v_0 avant le choc, v_1 après le choc, et u à l'instant de la plus grande compression;

$U = \overline{v_0 v_1} = \overline{v_0} - \overline{v_1}$ la vitesse perdue à la fin du choc;

$\varphi_0 = \overline{v_0 u} = \overline{v_0} - \overline{u}$ la vitesse perdue dans la première partie du choc;

Fig. 1.



$\varphi_1 = \overline{v_1 u} = \overline{v_1} - u$ la vitesse regagnée dans la seconde partie;

I_0, I_1 les projections des points v_0 et v_1 sur la direction de Ou.

On a

$$v_0^2 = u^2 + \varphi_0^2 + 2u.\,\overline{uI_0}, \quad v_1^2 = u^2 + \varphi_1^2 + 2u.\,\overline{uI_1};$$

d'où, en remarquant que $I_0 I_1 = U\cos(U, u)$,

$$mv_0^2 = mv_1^2 = m(\varphi_0^2 - \varphi_1^2) + 2mU\cos(U, u)\,u.$$

Si l'on fait la somme des équations semblables à cette dernière, établies pour toutes les masses m, on a

$$(1) \qquad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v_1^2 = \Sigma m(\varphi_0^2 - \varphi_1^2) + 2\Sigma m U\cos(U, u)\,u.$$

L'expression

$$\Sigma m \mathrm{U} \cos(\mathrm{U}, u)\, u\, dt$$

représente le travail élémentaire des quantités de mouvement perdues à la fin du choc, estimé dans le mouvement des deux corps à l'instant de la plus grande compression. Or à cet instant, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, les corps se meuvent comme deux solides invariables qui peuvent d'ailleurs glisser ou rouler l'un sur l'autre; d'où il suit que le travail ci-dessus est égal au travail élémentaire, évalué de la même manière, mais changé de signe, de l'impulsion due à l'action moléculaire mutuelle tangentielle développée au contact. Si donc on désigne par J cette impulsion et par w la projection de la vitesse de glissement, sur sa direction, on a

$$\Sigma m \mathrm{U} \cos(\mathrm{U}, u)\, dt = -\mathrm{J} w\, dt,$$

et la formule (1) devient

$$(2) \qquad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v_1^2 = \Sigma m (\varphi_0^2 - \varphi_1^2) - 2\mathrm{J}w.$$

Jusqu'ici nous n'avons fait intervenir que les hypothèses qui sont admises depuis longtemps par tous les auteurs. Nous allons maintenant supposer, ce qui paraît plausible, que φ_1 est directement opposé à φ_0; de sorte que, en posant

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = n, \quad \frac{1-n}{1+n} = \varepsilon,$$

nous aurons

$$\mathrm{U} = \varphi + \varphi_0 = \varphi_0(1+n), \quad \varphi_0 = \frac{\mathrm{U}}{1+n}, \quad \varphi_1 = \frac{n\mathrm{U}}{1+n},$$

$$\varphi_0^2 - \varphi_1^2 = \frac{1-n}{1+n}\mathrm{U}^2 = \varepsilon \mathrm{U}^2.$$

L'équation (2) devient alors

$$(3) \qquad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v_1^2 = \Sigma \varepsilon m \mathrm{U}^2 - 2\mathrm{J}w.$$

Si les corps choquants étaient complètement dénués d'élasticité, la seconde partie du choc ne se produirait pas, et l'on aurait

$$\varphi_1 = 0, \quad \text{d'où} \quad n = 0, \quad \varepsilon = 1;$$

par suite

$$(4) \qquad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v_1^2 = \Sigma m U^2 - 2 J w,$$

équation qui, traduite en langage ordinaire et abstraction faite du terme en J, constitue le théorème de Carnot.

Si les deux corps étaient parfaitement élastiques, les vitesses des molécules à la fin du choc seraient égales et de sens contraire à ce qu'elles étaient au commencement, et l'on aurait

$$n = 1, \quad \varepsilon = 0.$$

Mais, comme il n'existe pas dans la nature des corps parfaitement élastiques, ni complètement dénués d'élasticité, on ne devra avoir égard qu'à l'équation (3) considérée dans toute sa généralité, et dans laquelle ε représentera une fraction qui pourra varier d'une molécule à une autre.

Soient M la masse du corps choquant et M′ celle du corps choqué : nous conviendrons, en ce qui concerne le second membre de l'équation (3), de réserver les lettres m, U, ε pour représenter exclusivement la masse d'une molécule de M, sa vitesse perdue et le coefficient de la force vive due à cette vitesse. Nous accentuerons ces lettres pour une molécule de M′.

L'équation précitée prend alors la forme suivante :

$$(5) \qquad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v^2 = S \varepsilon m U^2 + S' \varepsilon' m U'^2 - 2 J w,$$

les symboles S, S′ ayant la signification de somme étendue aux molécules de l'un et l'autre corps.

Supposons maintenant que les coefficients ε et ε' soient respectivement constants pour les molécules m, m', quoique pouvant différer l'un de l'autre, il viendra

$$(6) \qquad \Sigma m v_0^2 - \Sigma m v^2 = \varepsilon S m U^2 + \varepsilon' S' m' U'^2 - 2 J w.$$

D'après notre mode de démonstration, il est évident que, si plusieurs corps viennent simultanément à se choquer, on devra introduire dans le second membre de l'équation précédente autant de termes en ε, ε' qu'il y a de corps et autant de termes semblables à $2J\varpi$ qu'il y a de chocs.

Mais bornons-nous à considérer l'équation (6) dans toute sa simplicité. Il paraîtrait résulter de notre dernière hypothèse que les constantes ε, ε' devraient être spécifiques pour l'un et l'autre corps, et que leurs valeurs pourraient se déterminer, une fois pour toutes, dans des cas simples, facilement accessibles à l'expérimentation. Mais il ne peut pas en être ainsi; car l'équation (6), jointe aux équations ordinaires de la Mécanique, afférentes à chaque problème, pourrait conduire à des résultats en désaccord avec les faits observés, comme cela arrive d'ailleurs pour les formules moins générales que (6), qui ont été proposées jusqu'ici. La raison en est que nous avons fait abstraction des vibrations des molécules des deux corps, produites par le choc, dont la force vive, qui se transforme plus ou moins en chaleur, vient s'ajouter à la force vive perdue telle que nous l'avons estimée. La force vive vibratoire pour chacun des corps ne dépend pas seulement de la nature de ce corps, mais encore de la forme, des dimensions et des positions relatives des deux corps. On peut comprendre empiriquement et respectivement les deux forces vives de cette nature qui se rapportent à M, M′ dans les deux premiers termes du second membre de l'équation (6), à la condition de considérer les coefficients ε, ε' comme dépendant l'un de la nature de M, l'autre de celle de M′, et tous deux des formes, des dimensions et des positions relatives des deux corps.

4. Les billes employées dans le jeu de billard étant à peu près identiques, les coefficients ε, ε' peuvent être considérés comme ayant la même valeur, et l'on sait que cette valeur est très petite, quoiqu'elle n'ait pas été déterminée.

Dans le choc oblique d'une bille contre un plan fixe ou contre une bande, l'expérience indique que *le rapport des composantes normales de la vitesse de la bille après et avant le choc est à très peu près indépendant de l'obliquité* et a, par suite, la même valeur que dans le choc normal; et, en admettant ce principe, on n'a pas, dans ce cas, à prendre en considération l'équation (6).

Nous en resterons à ces généralités, qui seront rendues plus claires, par l'étude du cas particulier suivant et les résultats des expériences qui s'y rapportent.

5. *Du choc direct de deux corps.* — Supposons que les deux masses M, M′ soient animées chacune d'un mouvement de translation parallèle à une direction déterminée et qu'elles viennent à se rencontrer de manière que la normale au contact passe par les centres de gravité C, C′ des deux corps et soit parallèle à la direction ci-dessus; comme il ne développe aucune action mutuelle tangentielle au contact, les corps choquants seront encore animés à la fin du choc de mouvements de translation parallèles à CC′.

Soient V_0, V_1 les vitesses de la masse choquante M, avant et après le choc; V'_0, V'_1 les vitesses semblables de l'autre masse.

Nous avons, d'après le principe de la conservation des quantités de mouvement,

$$MV_1 + M'V'_1 = MV_0 + M'V'_0$$

ou

$$(a) \qquad M'(V'_0 - V'_1) = M(V_1 - V_0).$$

D'autre part, l'équation (6) se réduit à la suivante :

$$M(V_0^2 - V_1^2) + M'(V'^2_0 - V'^2_1) = \varepsilon M(V_0 - V_1)^2 + \varepsilon' M'(V'_0 - V'_1)^2$$

ou

$$M(V_0 - V_1)(V_0 + V_1) + M'(V'_0 - V'_1)(V'_0 + V'_1)$$
$$= \varepsilon M(V_0 - V_1)^2 + \varepsilon' M'(V'_0 - V'_1)^2.$$

En remplaçant, dans cette dernière équation, le facteur $M'(V'_0 - V'_1)$ par sa valeur (a) et supprimant un facteur commun aux deux membres, on trouve

$$(b) \qquad V_0 + V_1 - (V'_0 + V'_1) = \varepsilon(V_0 - V_1) - \varepsilon'(V'_0 - V'_1),$$

et, en éliminant successivement V'_1 et V_1 entre (a) et (b), on obtient

$$(7) \qquad \begin{cases} V_1 = V_0 - \dfrac{2M(V_0 - V'_0)}{M'(1+\varepsilon) + M(1+\varepsilon')}, \\[2ex] V'_1 = V'_0 + \dfrac{2M(V_0 - V'_0)}{M'(1+\varepsilon) + M(1+\varepsilon')}. \end{cases}$$

Si le corps choqué est en repos avant le choc, on a simplement

$$(8)\quad \begin{cases} V_1 = V_0\left[1 - \dfrac{2M'}{M'(1+\varepsilon) + M(1+\varepsilon')}\right], \\ V'_1 = \dfrac{2MV_0}{M'(1+\varepsilon) + M(1+\varepsilon')}. \end{cases}$$

Supposons : 1° que l'on suspende par des fils les deux corps à deux points fixes de niveau, de manière que la ligne des centres de gravité soit horizontale, passe par le contact et qu'elle soit normale; 2° que l'on installe, à côté des billes et parallèlement à cette ligne, deux arcs circulaires verticaux métalliques gradués. En écartant la masse M de sa position jusqu'à une certaine hauteur, puis l'abandonnant à elle-même, sa vitesse au moment où elle viendra toucher M' sera due à cette hauteur; à l'aide des arcs gradués, on déterminera les hauteurs auxquelles se sont élevés les centres de gravité des deux corps à la suite du choc, et on calculera, par suite, les vitesses que les corps possédaient à la fin du choc. Si, en portant les valeurs de V_0, V_1, V'_1, ainsi obtenues, dans les formules (8), on obtient deux équations distinctes en ε, ε', on pourra déterminer les valeurs de ces inconnues.

Dans le cas d'une queue et d'une bille dont le poids était le tiers de celui de la queue, et pour des vitesses V_0 égales ou inférieures à $2^{m},80$, Coriolis, en opérant, comme on vient de l'indiquer, a trouvé

$$V_1 = \frac{7}{12}V_0, \quad V'_1 = \frac{5}{4}V_0;$$

en portant ces valeurs dans les formules (8), on obtient un résultat unique, savoir

$$1 + \varepsilon + 3(1 + \varepsilon') = \frac{24}{5},$$

ce qui est insuffisant pour déterminer ε et ε'. Si l'on considère qu'une bille, à la suite d'un grand nombre de chocs, ne change pas sensiblement de forme, on peut, sans grande erreur, supposer $\varepsilon = 0$, et alors on trouve

$$\varepsilon' = \frac{4}{15} = 0,27,$$

chiffre que nous admettrons également et par extension, pour un coup de queue sur une bille, de quelque manière qu'il soit donné.

Supposons maintenant que la masse M′ soit assez grande, par rapport à M, pour que l'on puisse la considérer comme infinie; on aura

$$(9)\qquad V_1 = -\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}V_0, \quad V'_1 = 0.$$

D'après l'expérience, le rapport $\frac{V_1}{V_0}$, par suite ε, n'est pas indépendant de la nature de la masse choquée, et c'est ce qui nous a conduit aux considérations de la fin du n° 5.

Ce cas est à peu près celui du choc d'une bille contre une bande, et Coriolis a trouvé que le rapport des vitesses normales de la bille, après et avant le choc, différait peu de 0,55 pour des vitesses initiales variant jusqu'à 7^m, ce qui est à peu près la limite maximum que l'on atteint au billard. En faisant $-\frac{V_1}{V_0} = 0,55$, la formule (9) donne

$$\varepsilon = 0,29.$$

Si on laisse tomber verticalement une bille de billard sur une plaque de marbre horizontale, la bille se relève après le choc aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur de chute; on a ainsi

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

d'où

$$\varepsilon = 0,155.$$

Un disque en ivoire qu'on laisse retomber à plat sur une plaque de marbre ne rejaillit pas; ce que l'on ne peut expliquer que par la transformation complète de la force vive acquise en force vive vibratoire.

6. *Conventions et notations.* — Nous appellerons *point de choc* le point de contact dans le choc d'une queue et d'une bille, de deux billes, d'une bille et d'une bande.

Nous supposerons qu'une bille est composée de couches sphériques homogènes dont la densité peut varier de l'une à l'autre.

Si dans un problème on n'a qu'une bille à considérer, nous désignerons par

R, M son rayon et sa masse;

$M\frac{R^2}{k}$ son moment d'inertie par rapport à un diamètre;

χ, η, ζ les composantes, parallèles à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, de la vitesse, à un instant quelconque, du centre gravité C de la bille;

r, p, q les composantes semblables de la rotation de la bille autour de ce centre.

Dans le cas où deux billes entreraient en ligne de compte, on accentuera les lettres précédentes pour la seconde bille.

Les éléments du mouvement d'un corps, à un instant considéré comme initial, seront caractérisés par l'indice 0; pour un choc, cet instant sera celui du commencement du choc, et l'on distinguera par l'indice 1 les éléments du mouvement qui se rapportent à la fin du choc.

§ II. — Mouvement d'une bille sur un tapis, en ayant égard au frottement de glissement

7. La bille peut être lancée sur le tapis par un procédé quelconque; mais, au point de vue spécial où nous nous plaçons, elle le sera par le choc d'une queue dont nous étudierons plus loin les effets; nous ferons coïncider le plan xOy avec celui du tapis, Oz se trouvant à l'extérieur.

Soient f le coefficient de frottement qui, d'après Coriolis, peut être pris égal à 0,25; c_x, c_y les composantes parallèles à Ox, Oy de la vitesse de glissement c de la bille sur le tapis.

La rotation q restant évidemment constante, nous pouvons en faire abstraction, puisqu'elle n'a aucune influence sur la direction du frottement.

Nous avons les relations

$$(1) \qquad c_x = \chi - pR, \quad c_y = \eta + nR,$$

et les équations

$$(2)\quad \begin{cases} M\dfrac{d\xi}{dt} = -\dfrac{c_x}{c} f M g, \\ M\dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{c_y}{c} f M g, \\ M\dfrac{R^2}{k}\dfrac{dn}{dt} = -\dfrac{c_y}{c} f M g R, \\ M\dfrac{R^2}{k}\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{c_x}{c} f M g R. \end{cases}$$

On déduit des deux premières de ces équations, en ayant égard aux valeurs (1),

$$(3)\qquad \frac{d\xi}{\xi - pR} = \frac{d\eta}{\eta + nR}.$$

En divisant l'une par l'autre, la première et la quatrième, puis la deuxième et la troisième des équations (2), on trouve, après intégration,

$$pR = p_0 R - k(\xi - \xi_0),$$
$$nR = n_0 R + k(\eta - \eta_0).$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3), elle devient

$$\frac{d\xi}{\xi(1+k) - k\xi_0 - p_0 R} = \frac{d\eta}{\eta(1+k) - k\eta_0 + n_0 R},$$

et son intégrale exprime que le rapport des deux dénominateurs ou $\frac{c_y}{c_x}$ est constant. Ainsi donc la direction de la vitesse de glissement, par suite celle du frottement, restent constantes; l'intensité du frottement, étant elle-même constante, on voit que, en *projection sur le tapis, le centre de la bille décrit une parabole* (théorème de J.-A. Euler). Cette courbe sera tracée par le point de contact. Plaçons l'origine O à la position qu'occupait, à un certain instant considéré comme initial, la projection horizontale du centre C de la bille et prenons l'axe Oy parallèle à la vitesse de glissement. Nous aurons

$$c_x = 0, \quad c_y = c,$$

et les équations (2) donnent, par suite,

$$(3)\qquad \begin{cases} \chi = \chi_0, \quad \eta = \eta_0 - fgt, \\ n\mathrm{R} = n_0\mathrm{R} - fgkt, \quad p = p_0 \end{cases} \text{ (1)}.$$

Soient

a la vitesse initiale du centre C de la bille;
α son inclinaison sur l'axe Ox;
x, y les coordonnées d'un point quelconque de la parabole.

Nous avons

$$\chi_0 = a\cos\alpha, \quad \eta_0 = a\sin\alpha, \quad \chi = \frac{dx}{dt}, \quad \eta = \frac{dy}{dt};$$

par suite

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\cos\alpha, \quad \dfrac{dy}{dt} = a\sin\alpha - fgt, \\ x = a\cos\alpha t, \quad y = a\sin\alpha t - \dfrac{fgt^2}{2} \end{cases}$$

et, pour l'équation de la parabole,

$$(5)\qquad y = a\,\mathrm{tang}\,\alpha x - \frac{fg}{2}(1 + \mathrm{tang}^2\alpha)x^2.$$

Le roulement succédera au glissement, à partir du moment où la vitesse de glissement sera nulle ou lorsque l'on aura

$$0 = \eta + n\mathrm{R} = \eta_0 + n_0\mathrm{R} - fg(1 + k)t;$$

---

(1) La vitesse du point de la verticale du centre C situé à la hauteur h, au-dessus de ce centre, a pour composantes

$$\text{Suivant } Ox \ldots\ldots \quad \chi + hp = \chi_0 + hp_0$$
$$\text{Suivant } Oy \ldots\ldots \quad \eta - hn = \eta_0 - hn_0 - fgt\left(1 - \frac{kh}{\mathrm{R}}\right).$$

Cette vitesse restera donc constante en grandeur et en direction si l'on a $h = \frac{\mathrm{R}}{k}$; d'où ce théorème de Coriolis :

La vitesse du centre d'oscillation situé au-dessus du centre de gravité de la bille reste constante en grandeur et en direction.

d'où, en désignant par v_0 la vitesse de glissement initiale,

$$t = \frac{v_0}{fg(1+k)}.$$

Le point correspondant de la parabole aura pour coordonnées

$$x_1 = \frac{av_0 \cos\alpha}{fg(1+k)}, \quad y_1 = \left(a \sin\alpha - \frac{v_0}{1+k}\right)\frac{v_0}{fg(1+k)};$$

à partir de ce point, le centre C décrira la tangente à la parabole. Nous ne croyons pas devoir nous arrêter aux équations du mouvement que prend alors la bille, en ayant égard au frottement de roulement, cette question offrant peu d'intérêt et rentrant d'ailleurs dans le domaine de l'enseignement ordinaire.

§ III. — Du choc d'une sphère libre contre un plan fixe.

8. Quoique cette question n'ait pas un rapport immédiat avec le jeu de billard, nous avons cru cependant devoir nous en occuper en raison des résultats intéressants auxquels on parvient, et qui peuvent avoir leur utilité au point de vue de certaines expériences.

Conservons les notations et conventions du numéro précédent et désignons de plus par Z la réaction normale du plan sur la sphère. Nous aurons, en continuant à faire abstraction de la rotation constante q,

$$(1) \qquad v_x = \chi - p\mathrm{R}, \quad v_y = \eta + n\mathrm{R},$$

et

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}\frac{d\chi}{dt} &= -\frac{v_x}{v} f\mathrm{Z}, \\ \mathrm{M}\frac{d\eta}{dt} &= -\frac{v_y}{v} f\mathrm{Z}, \\ \mathrm{M}\frac{d\zeta}{dt} &= \mathrm{Z}, \\ \mathrm{M}\frac{\mathrm{R}^2}{k}\frac{dn}{dt} &= -\frac{v_x}{v} f\mathrm{ZR}, \\ \mathrm{M}\frac{\mathrm{R}^2}{k}\frac{dp}{dt} &= \frac{v_y}{v} f\mathrm{ZR}. \end{aligned}\right.$$

On démontrera comme plus haut que la direction de la vitesse de glissement de la bille sur le tapis reste constante. En prenant l'axe Ox parallèle à cette direction, nous aurons d'abord

$$(3)\qquad \eta = \eta_0, \quad n = n_0,$$

puis

$$(4)\qquad M\frac{d\chi}{dt} = -fZ, \quad M\frac{d\zeta}{dt} = Z, \quad M\frac{R}{k}\frac{dp}{dt} = fZ.$$

De ces dernières équations on déduit, par l'élimination de Z au moyen de la seconde et en intégrant entre les limites du choc,

$$(5)\qquad \begin{cases} \chi_1 = \chi_0 - f(\zeta_1 - \zeta_0), \\ p_1 R = p_0 R + fk(\zeta_1 - \zeta_0). \end{cases}$$

Si nous désignons par ν le rendement de la vitesse normale, nous avons, en remarquant que ζ_0 est négatif,

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_0} = -\nu,$$

et enfin

$$(6)\qquad \begin{cases} \chi_1 = \chi_0 + f(1+\nu)\zeta_0, \\ p_1 R = p_0 R - fk(1+\nu)\zeta_0. \end{cases}$$

Soient a_0, a_1 les résultantes de χ_0, ζ_0 et de ζ_1, χ_1; α_0, α_1 les angles aigus que font leurs directions avec Ox; nous aurons

$$\chi_0 = a_0\cos\alpha_0, \quad \zeta_0 = -a_0\sin\alpha_0,$$
$$\chi_1 = a_1\cos\alpha_1, \quad \zeta_1 = -a_1\sin\alpha_1,$$

par suite

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1\cos\alpha_1 = a_0\cos\alpha_0 - f(1+\nu)a_0\sin\alpha_0, \\ a_1\sin\alpha_1 = \nu a_0\sin\alpha_0, \\ \operatorname{tang}\alpha_1 = \dfrac{\nu\operatorname{tang}\alpha_0}{1 - f(1+\nu)\operatorname{tang}\alpha_0}. \end{cases}$$

9. *Ricochets.* — Supposons que, sous un certain angle, on lance la

sphère sur le plan censé horizontal, de manière que la translation η soit nulle à l'origine. Il se produira une suite de ricochets dans lesquels le centre C du mobile restera constamment dans un même plan normal au plan fixe; si a_0, α_0 se rapportent à la fin de l'un de ses ricochets, le centre C décrira un arc parabolique dont la portée sera

$$P_0 = \frac{a_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g},$$

et l'on aura de même, pour la portée du ricochet suivant,

$$P_1 = \frac{a_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{g};$$

d'où

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{a_1^2 \sin \alpha \cos \alpha_1}{a_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0},$$

et, en vertu des deux premières des formules (7),

$$(8) \qquad \frac{P_1}{P_0} = \nu [1 - f(1 + \nu) \operatorname{tang} \alpha_0].$$

Si l'angle α_0 est assez petit pour qu'on puisse négliger $f \operatorname{tang} \alpha_0$ devant l'unité, à plus forte raison en sera-t-il de même pour les ricochets suivants, eu égard à la troisième des formules (7); et alors on aura simplement

$$(9) \qquad \frac{P_1}{P_0} = \nu.$$

10. *Expériences de M. Rozé.* — Cet habile expérimentateur a eu l'idée de lancer, dans les conditions ci-dessus indiquées, une bille d'ivoire sur une face plane horizontale de corps de différentes natures qui, par leurs masses relativement considérables, pouvaient être considérés comme absolument fixes.

Il a déterminé le rapport de deux consécutives des empreintes laissées par la bille sur le plan, empreintes dont le nombre s'est élevé jusqu'à 12 dans quelques-unes de ses expériences. Il est ainsi arrivé à établir

les moyennes suivantes, qui diffèrent relativement peu des chiffres réels :

Plaque de marbre poli, recouverte de noir de fumée.....	$\nu = 0,80$ [1]
Plaque de marbre mal poli à l'état naturel (hauteur initiale de chute au plus égale à $0^m,10$).....	$\nu = 0,85$
Plaque de marbre recouverte d'une feuille de papier au noir de fumée (hauteur initiale de chute au plus égale à $0^m,15$)	$\nu = 0,65$
Madrier de sapin au noir de fumée.....	$\nu = 0,63$

Comme le papier et le bois ne sont en définitive que du ligneux, il paraît résulter des deux derniers de ces chiffres que, lorsque l'énergie du choc ne dépasse pas certaines limites, le rendement de la vitesse normale du plan fixe est principalement dû à une plaque d'une certaine nature recouvrant un massif d'une nature différente.

§ IV. — Du choc d'une bille contre une bande.

11. Nous prendrons les axes Oy et Oz respectivement normaux au tapis et à la bande, et nous supposerons avec Coriolis $f = 0,20$.

Si, pendant le choc, le frottement de la bille contre la bande donnait lieu à une composante verticale dirigée de bas en haut, le mobile, à la fin du choc, pourrait être animé, dans le même sens, d'une petite vitesse translatoire, mais qui serait presque immédiatement annulée par l'effet de la pesanteur. Si la composante ci-dessus avait une direction inverse de la précédente, elle produirait sur le tapis une percussion de l'ordre de grandeur de cette composante, d'où, à la fin du choc, une vitesse de translation verticale de la bille de bas en haut due à l'élasticité du tapis, qui est très faible, et cette vitesse très petite serait aussi annulée presque immédiatement par la pesanteur. Ainsi donc, quoi qu'il arrive, on peut supposer que la bille ne quitte pas le tapis, ce qui est d'ailleurs conforme à l'observation. Nous aurons donc $\eta = 0$, et nous n'aurons pas à considérer la seconde des équations (2) du n° **8**.

Nous ferons abstraction, comme ci-dessus et pour les mêmes motifs, de la rotation constante q.

---

[1] Ce chiffre diffère peu de celui $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,81$, que nous avons indiqué au n° 5.

Nous substituerons, pour plus de commodité, mais seulement dans la question actuelle, les notations φ et ψ à v_x, v_y, en affectant ces lettres des indices 0 et 1, lorsqu'elles se rapporteront au commencement et à la fin du choc.

Nous avons ainsi les relations

$$(1)\qquad \varphi = \chi - p\mathrm{R}, \quad \psi = n\mathrm{R},$$

et les équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}\frac{d\chi}{dt} &= -\frac{\varphi}{v} f\mathrm{Z}, \\ \mathrm{M}\frac{d\zeta}{dt} &= \mathrm{Z}, \\ \mathrm{M}\frac{\mathrm{R}}{k}\frac{dn}{dt} &= -\frac{\psi}{v} f\mathrm{Z}, \\ \mathrm{M}\frac{\mathrm{R}}{k}\frac{dp}{dt} &= \frac{\varphi}{v} f\mathrm{Z}. \end{aligned}\right.$$

Des deux dernières de ces équations on déduit, en ayant égard aux valeurs (1),

$$(3)\qquad \frac{dn}{n\mathrm{R}} = -\frac{dp}{\chi - p\mathrm{R}}.$$

Si l'on divise l'une par l'autre la première et la dernière des mêmes équations, puis que l'on effectue l'intégration, on trouve

$$(4)\qquad \chi = \chi_0 - \frac{\mathrm{R}}{k}(p - p_0),$$

par suite

$$(5)\qquad \varphi = \chi_0 + \frac{p_0\mathrm{R}}{k} - \frac{1+k}{k}p\mathrm{R}.$$

L'équation (3) prend ainsi la forme

$$\frac{dn}{n\mathrm{R}} = \frac{dp}{\frac{1+k}{k}p\mathrm{R} - \left(\chi_0 + \frac{p_0\mathrm{R}}{k}\right)}.$$

On déduit de là

$$n = n_0 \left[\frac{\frac{1+k}{k} p\mathrm{R} - \left(\chi_0 + \frac{p_0 \mathrm{R}}{k} \right)}{\frac{1+k}{k} p_0 \mathrm{R} - \left(\chi_0 + \frac{p_0 \mathrm{R}}{k} \right)} \right]^{\frac{k}{1+k}}$$

ou simplement

$$(6) \qquad n\mathrm{R} = n_0 \mathrm{R} \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^{\frac{k}{1+k}} = \psi.$$

Nous avons aussi

$$(7) \qquad v = \pm \varphi \sqrt{1 + \frac{n_0^2 \mathrm{R}^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^{\frac{1+k}{2}}}$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que φ sera positif ou négatif, ce qui sera d'ailleurs indiqué par le signe de φ_0.

En divisant l'une par l'autre les deux premières des équations (2) et ayant égard à la valeur précédente, on trouve

$$(8) \qquad f d\zeta_1 = \mp \sqrt{1 + \frac{n_0^2 \mathrm{R}^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^{\frac{1+k}{2}}} \, d\chi.$$

De la première des formules (1) et de l'équation (5) on déduit, par l'élimination de p,

$$(9) \qquad \chi = \frac{k\chi_0 + p_0 \mathrm{R}}{1+k} \varphi;$$

d'où

$$d\chi = \frac{d\varphi}{1+k},$$

et l'équation (8) donne par suite, en effectuant l'intégration dans l'étendue du choc,

$$\zeta_1 - \zeta_0 = f(1+k) = \mp \int_{\varphi}^{\varphi_0} \sqrt{1 + \frac{n_0^2 \mathrm{R}^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^{\frac{1+k}{k}}} \, d\varphi.$$

Soient a la valeur absolue de ζ_0, ν la fraction de la vitesse normale

initiale rendue par la bande, estimée à 0,55 (n° 5); nous avons

$$\zeta_0 = -a, \quad \zeta_1 = \nu a,$$

et enfin

$$(10) \qquad af(1+k)(1+\nu) = \mp \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sqrt{1 + \frac{n_0^2 R^2}{\varphi_0^2}\left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^{\frac{1+k}{2}}}\, d\varphi.$$

En admettant que l'on puisse tirer la valeur φ_1 de cette équation, le problème sera complètement résolu, puisque les équations (5), (6), (9) feront connaître respectivement p_1, n_1, χ_1. Mais il est visible que pratiquement cette solution n'est guère possible, excepté dans le cas de $n_0 = 0$.

Toutefois, si nous remarquons que $\frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi}$ est de l'ordre de f, et si nous admettons que l'on puisse négliger le carré de cette quantité, nous aurons

$$\left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^{\frac{1+k}{2}} = \left(1 + \frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi_0}\right)^{\frac{1+k}{2}} = 1 + \left(\frac{1+k}{2}\right)\frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi_1};$$

par suite

$$(11) \quad af(1+k)(1+\nu) = \pm \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sqrt{1 + \frac{n_0^2 R^2}{\varphi_0^2} - \frac{1+k}{2}\frac{n_0^2 R^2}{\varphi_0^3}(\varphi - \varphi_0)}\, d\varphi.$$

L'intégration pourra alors s'effectuer, mais nous ne croyons pas utile de pousser plus loin le calcul.

§ V. — Du choc de deux sphères libres en ayant égard au frottement et a leur degré d'élasticité.

12. Nous prendrons pour axe des x la droite qui joint les centres C, C′ de la bille choquante et de la bille choquée, dont les masses seront respectivement représentées par M, M′, et nous placerons l'origine O des coordonnées au delà de C par rapport à C′. Nous désignerons par X l'action normale exercée, pendant le choc, par M sur M′, par f le coefficient du frottement développé au point du choc, et enfin par v_y, v_z les composantes parallèles à Ox, Oy de la vitesse de glissement v de M sur M′. Nous ferons abstraction des rotations n, n', qui restent constantes du commencement à la fin du choc et qui n'interviennent

ni dans la direction du frottement ni dans l'équation des forces vives.

Nous avons les relations

$$(1)\qquad c_y = \eta - \eta' + \mathrm{R}q + \mathrm{R}'q', \quad c_z = \zeta - \zeta' - p\mathrm{R} - p'\mathrm{R}'$$

et les équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}\frac{d\eta}{dt} = -\mathrm{X}, && \mathrm{M}\frac{\mathrm{R}^2}{k}\frac{dp}{dt} = \frac{c_z}{c} f\mathrm{R}\mathrm{X},\\ &\mathrm{M}\frac{d\eta}{dt} = -\frac{c_y}{c} f\mathrm{X}, && \mathrm{M}\frac{\mathrm{R}^2}{k}\frac{dq}{dt} = -\frac{c_z}{c} f\mathrm{R}\mathrm{X},\\ &\mathrm{M}\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{c_z}{c} f\mathrm{X}, \end{aligned}\right.$$

$$(2')\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}'\frac{d\eta'}{dt} = \mathrm{X}, && \frac{\mathrm{M}\,\mathrm{R}'^2}{k'}\frac{dp'}{dp} = \frac{c_z}{c} f\mathrm{R}'\mathrm{X},\\ &\mathrm{M}'\frac{d\eta'}{dt} = \frac{c_y}{c} f\mathrm{X}, && \frac{\mathrm{M}\,\mathrm{R}'^2}{k'}\frac{dq'}{dt} = -\frac{c_y}{c} f\mathrm{R}'\mathrm{X},\\ &\mathrm{M}'\frac{d\zeta'}{dt} = \frac{c_z}{c} f\mathrm{X}. \end{aligned}\right.$$

En divisant entre elles la seconde et la troisième des équations (2), en ayant égard aux valeurs (1), on trouve

$$(3)\qquad \frac{d\eta}{\eta - \eta' + \mathrm{R}q + \mathrm{R}'q'} = \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta' - \mathrm{R}p - \mathrm{R}'p'}.$$

Portons les valeurs de $\frac{c_y}{c} f\mathrm{X}$, $\frac{c_z}{c} f\mathrm{X}$ déduites de la seconde et de la troisième des équations (2) dans les autres équations (2) et les équations (2') qui renferment ces quantités, puis effectuons les intégrations; nous aurons

$$\eta' = \eta'_0 - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}(\eta - \eta_0),$$

$$\mathrm{R}q = \mathrm{R}q_0 + k(\eta - \eta_0),$$

$$\mathrm{R}p = \mathrm{R}p_0 - h(\zeta - \zeta_0),$$

$$\zeta' = \zeta'_0 - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}(\zeta - \zeta_0),$$

$$\mathrm{R}'q' = \mathrm{R}'q'_0 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}k'(\eta - \eta_0),$$

$$\mathrm{R}'p' = \mathrm{R}'p'_0 - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}k'(\zeta - \zeta_0),$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3), elle devient

$$\frac{d\eta_1}{\eta_0 - \eta'_0 + \mathrm{R}q_0 + \mathrm{R}q'_0 + \left[1 + k + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}(1 + k')\right](\eta_1 - \eta_0)}$$
$$= \frac{d\zeta}{\zeta_0 - \zeta'_0 - \mathrm{R}p_0 - k'p'_0 + \left[1 + k + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}(1 + k')\right](\zeta_1 - \zeta_0)},$$

et son intégrale exprime que le rapport des dénominateurs, ou $\frac{v_y}{v_z}$, est constant.

Donc, pendant la durée du choc, *la vitesse de glissement de* M *sur* M′ *conserve une direction constante et ne dépend que du mouvement relatif des deux sphères à l'instant où le choc commence.*

En prenant Oy parallèle à cette direction, nous aurons $v_y = v$, $v_z = 0$, et, d'après deux équations de chacun des groupes (2) et (2′), les composantes ζ, ζ', p, p' resteront constantes; nous pourrons en faire abstraction, puisqu'elles ne donneraient aucun terme dans l'équation des forces vives. Nous aurons ensuite, en intégrant les autres équations de ces deux groupes entre les limites du choc,

$$\mathrm{M}(\chi_1 - \chi_0) = -\int \mathrm{X}\,dt, \quad \frac{\mathrm{MR}}{k}(q_1 - q_0) = -\int\int \mathrm{X}\,dt,$$
$$\mathrm{M}(\eta_1 - \eta_0) = -\int\int \mathrm{X}\,dt, \quad \frac{\mathrm{M'R'}}{\mathrm{R}}(q'_1 - q'_0) = -\int\int \mathrm{X}\,dt,$$
$$\mathrm{M}'(\chi'_1 - \chi'_0) = \int \mathrm{X}\,dt,$$
$$\mathrm{M}'(\eta'_1 - \eta'_0) = -\int\int \mathrm{X}\,dt,$$

et, en posant

$$\chi_0 - \chi_1 = \omega_1, \tag{4}$$

il vient

$$\left\{\begin{aligned} &\eta_0 - \eta_1 = \int \omega_1, \quad q_0 - q_1 = \int \frac{k}{\mathrm{R}}\omega_1, \\ &\chi'_0 - \chi'_1 = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}\omega_1, \quad q'_0 - q'_1 = \int \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}\frac{k'}{\mathrm{R}'}\omega_1, \\ &\eta'_0 - \eta'_1 = -\int \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}\omega_1, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

En ayant égard à ces valeurs et faisant l'application du théorème de Koening, on a, pour la perte de force vive perdue par les deux corps après le choc,

$$a \quad \left\{ \begin{aligned} & M\left[\chi_0^2 - \chi_1^2 + \eta_0^2 - \eta_1^2 + \frac{R^2}{k}(q_0^2 - \eta_1^2)\right] \\ & \quad + M'\left[\chi_0'^2 - \chi_1'^2 + q^2 - q_1'^2 + \frac{R'^2}{k}(q_0'^2 - q_1'^2)\right] \\ & = M\omega_1(\chi_0 + \chi_1)(+f(\eta_0 + \eta_1) + fR(q_0 + q_1) \\ & \qquad - (\chi_0' + \chi_0') - f(\eta_0' + \eta_1') + fR'(q_0' + q_1') \\ & = M\omega_1\left\{A - \omega_1(1 + f^2(1 + k) \right. \\ & \qquad \left. - \omega_1\frac{M}{M'}(1 + f^2(1 + k')\right\}, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$A = 2(\chi_0 - \chi_0' + f(\eta_0 - \eta_0') + Rq_0 + R'q_0').$$

On a de même, pour les forces vives de M, M′ dues aux vitesses perdues,

$$b \quad \left\{ \begin{aligned} & M\left[(\chi_0 - \chi_1)^2 + (\eta_0 - \eta_1)^2 + \frac{R^2}{k}(q_0 - q_1)^2\right] \\ & \quad = M\omega_1^2(1 + f^2(1 + k)), \end{aligned} \right.$$

$$b' \quad \left\{ \begin{aligned} & M'\left\{(\chi_0' - \chi_1')^2 + (\eta_0' - \eta_1')^2 + \frac{R'^2}{k'}(q_0' - q_1')^2\right\} \\ & \quad = M\omega_1^2\frac{M}{M'}(1 + f^2(1 + k')). \end{aligned} \right.$$

L'impulsion du frottement, relative à la durée du choc, en ayant égard à la première des équations (2), a pour valeur

$$c \quad f\int X\,dt = fM\omega_1.$$

En désignant par ω' la vitesse de glissement M′ sur M à l'instant de la compression maximum, d'après l'équation (6) du n° 5, l'expression (a) et la somme des valeurs (b), (b'), (c) multipliées respectivement par ε, ε', $-2\omega'$, ce qui donne

$$6)\quad \omega_1\left\{(1 + f^2(1 + k))(1 + \varepsilon) + \frac{M}{M'}(1 + f^2(1 + k'))(1 + \varepsilon')\right\} = A + 2f\omega'.$$

Toutes les formules que nous venons d'établir s'appliquent à l'instant de la plus grande compression substitué à celui de la fin du choc; mais, comme les corps choquants se comportent à cet instant comme étant complètement dénués d'élasticité, nous devrons prendre $\varepsilon = \varepsilon' = 1$. Si nous supprimons l'indice 1, pour établir une distinction entre les éléments du mouvement qui se rapportent au même instant et ceux qui sont relatifs à la fin du choc, l'équation (6) nous donnera

$$(7)\qquad 2\omega\left\{1 + f^2(1+k) + \frac{M}{M'}[1 + f^2(1+k')]\right\} = A + 2fw,$$

d'où

$$(8)\qquad \omega_1 = \frac{2\omega\left\{1 + f^2(1+k) + \frac{M}{M'}[1 + f^2(1+k')]\right\}}{[1 + f^2(1+k)](1+\varepsilon) + \frac{M}{M'}[1 + f^2(1+k')](1+\varepsilon')}.$$

Mais nous avons $\chi' = \chi$ et la seconde des équations (5) devient

$$\chi_0 - \chi = -\frac{M}{M'}\omega = -\frac{M}{M'}(\chi_0 - \chi),$$

d'où

$$\chi = \frac{\chi_0 + \frac{M}{M'}\chi_0}{1 + \frac{M}{M'}}, \quad \omega = \frac{\chi_0 - \chi_0}{1 + \frac{M}{M'}};$$

par suite

$$(9)\qquad \omega_1 = \frac{2\left\{1 + f^2(1+k) + \frac{M}{M'}[1 + f^2(1+k')]\right\}}{[1 + f^2(1+k)](1+\varepsilon) + \frac{M}{M'}[1 + f^2(1+k')](1+\varepsilon')},$$

et, en se reportant aux formules (4) et (5), tous les éléments du mouvement des deux sphères à la fin du choc se trouveront déterminés.

VI. — Du choc de deux billes posées sur un tapis.

15. Il importe, dans le jeu de billard, que les billes aient le même diamètre pour que la ligne des centres, sur laquelle se trouve le point

de choc de deux d'entre elles, soit parallèle au tapis. Car, si le joueur, dans diverses parties, se servait de billes dans lesquelles les rapports seraient différents, sa tactique pourrait se trouver en défaut quelle que soit son habileté.

Malgré l'égalité des diamètres, il arrive, ce qui est peu favorable au jeu, que les masses de deux billes soient différentes, ainsi que leurs moments d'inertie par rapport à un diamètre. Coriolis, dans le titre de son Chapitre V, avait annoncé qu'il tiendrait compte de ces différences; néanmoins tous ses calculs se rapportent au choc de deux billes identiques et homogènes.

En ce qui concerne le choc des billes, Coriolis s'exprime ainsi : « En tenant compte du frottement des billes entre elles, nous pourrons tout à fait négliger celui qui se produit sur le tapis aux points d'appui des billes pendant le choc, puisque celui-ci ne peut résulter que de la composante verticale de la quantité de mouvement produite seulement par le frottement entre les billes, lequel est fort petit, d'après les expériences que nous avons rapportées précédemment. Nous négligerons aussi, à plus forte raison, la très petite vitesse verticale que les centres des billes peuvent prendre par l'effet du frottement, cet effet étant détruit par la résistance du tapis ou rendu insensible par le poids des billes qui les ramène ensuite contre le tapis qu'elles ne quittent même pas. » Ce raisonnement est très correct, mais on a le droit de s'étonner que son auteur n'en ait pas tenu compte; car, dans ses développements analytiques, il admet implicitement que les deux billes sont libres.

Le coefficient de frottement f d'une bille sur l'autre, d'après Coriolis, ne paraît pas devoir atteindre 0,03. Comme les billes sont de même nature, on peut admettre que les coefficients ε, ε' sont égaux, mais leur valeur, qui est très petite, n'a pas été déterminée.

Nous conserverons les notations du numéro précédent, mais nous devrons supposer $R' = R$, $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$ et faire abstraction des deux équations de translation verticale.

Nous avons donc les relations

$$(1) \qquad v_y = \eta - \eta' + R(q + q'), \quad v_z = -R(p + p'),$$

et les équations

$$(2)\quad \begin{cases} M\dfrac{d\xi}{dt} = -X, & M\dfrac{R^2}{k}\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{c_z}{c}fX.R, \\ M\dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{c_y}{c}fX, & M\dfrac{R^2}{k}\dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{c_y}{c}fX.R. \end{cases}$$

$$(2')\quad \begin{cases} M'\dfrac{d\xi'}{dt} = X, & M'\dfrac{R^2}{k}\dfrac{dp'}{dt} = \dfrac{c_z}{c}fX.R, \\ M'\dfrac{d\eta'}{dt} = \dfrac{c_y}{c}fX, & M'\dfrac{R^2}{k'}\dfrac{dq'}{dt} = -\dfrac{c_y}{c}fX.R. \end{cases}$$

De la première et de la troisième des équations (2) on déduit

$$(3)\quad \frac{d\eta}{c_y} = -\frac{R}{k}\frac{dp}{c_z}.$$

Nous allons maintenant chercher à exprimer c_y et c_z respectivement en fonction de η et p.

Divisons respectivement entre elles les secondes, les quatrièmes, les troisièmes des équations des groupes (2) et (2'); nous trouvons, après avoir effectué les intégrations,

$$(1)\quad \begin{cases} \eta' = \eta'_0 - \dfrac{M}{M'}(\eta - \eta_0), \\ Rq = Rq_0 + k(\eta - \eta_0), \\ Rq' = Rq'_0 + k'\dfrac{M}{M'}(\eta - \eta_0), \\ Rp' = Rp'_0 + \dfrac{k'}{k}\dfrac{M}{M'}(p - p_0), \end{cases}$$

et les formules (1) deviennent

$$(1')\quad \begin{cases} c_y = (\eta - \eta_0)\left[1 + k + \dfrac{M}{M'}(1 + k')\right] + \eta_0 - \eta'_0 + R(q_0 + q'_0), \\ c_z = -R(p - p_0)\left(1 + \dfrac{Mk'}{M'k}\right) - R(p_0 + p'_0). \end{cases}$$

Soient c_0 la vitesse de glissement de M sur M' au commencement du

choc, γ l'angle que forme sa direction avec Oy; en posant

$$(5)\qquad a = 1 + k + \frac{M}{M'}(1 + k'), \quad \frac{b}{k} = 1 + \frac{Mk'}{M'k},$$

les formules (1') prennent la forme suivante :

$$(6)\qquad \begin{cases} v_y = v_0 \cos\gamma + a(v_t - v_{t0}), \\ v_z = v_0 \sin\gamma - \dfrac{bR}{k}(p - p_0). \end{cases}$$

L'équation (3) devient alors

$$\frac{dv_t}{v_0 \cos\gamma - a(v_t - v_{t0})} = \frac{dp}{b(p - p_0) - \dfrac{k v_0 \sin\gamma}{R}},$$

d'où

$$(7)\qquad R(p - p_0) = \frac{k v_0 \sin\gamma}{b}\left\{1 - \left[1 + \frac{a(v_t - v_{t0})}{v_0 \cos\gamma}\right]^{\frac{b}{a}}\right\}.$$

La seconde des équations (6) prend la forme

$$(8)\qquad v_z = v_0 \sin\gamma\left[1 + a\frac{(v_t - v_{t0})}{v_0 \cos\gamma}\right]^{\frac{b}{a}},$$

et l'on a, par suite,

$$(9)\qquad \frac{v_y}{v} = \frac{v_0 \cos\gamma + a(v_t - v_{t0})}{\sqrt{[v_0 \cos\gamma + a(v_t - v_{t0})]^2 + v_0^2 \sin^2\gamma\left[1 + \dfrac{a(v_t - v_{t0})}{v_0 \cos\gamma}\right]^{\frac{2b}{a}}}}$$

Il résulte de là que, pendant le choc, la direction du frottement n'est pas constante, comme l'avait supposé Coriolis.

Des deux premières des équations (1) on déduit

$$(10)\qquad f(\chi_1 - \chi_0) = \int_{v_{t0}}^{v_t} \frac{v}{v_y}\, dv_t;$$

d'où une relation entre χ_1 et l'inconnue η_1 au moyen de laquelle s'expriment les autres éléments du mouvement après le choc, en vertu des équations (4) et (7) et des premières des équations (2) et (2'), après avoir effectué l'élimination de X et l'intégration. On n'aura plus ensuite qu'à établir l'équation des forces vives pour avoir la solution complète du problème; mais, en restant dans ces généralités, on voit que cette solution ne sera pas explicite, même dans le cas de deux billes identiques et homogènes, cas où l'on aurait $\frac{b}{a} = \frac{7}{5}$.

Cependant, comme le coefficient f est très petit, on peut en négliger le carré, par suite, la seconde puissance des variations éprouvées par les éléments du mouvement du commencement à la fin du choc, qui seraient nulles avec ce coefficient. A ce degré d'approximation, on peut supposer $\frac{v}{v_y} = \frac{1}{\cos\gamma}$ dans l'équation (10), qui donne alors

$$\eta_0 - \eta_1 = f\omega_1 \cos\gamma, \tag{11}$$

en posant

$$\chi_0 - \chi_1 = \omega_1. \tag{12}$$

Des deux premières équations des groupes (2) et (2') et des équations (4) et (7), on déduit les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
\chi'_0 - \chi_1 &= -\frac{M}{M'}\omega_1, \\
\eta'_0 - \eta'_1 &= -f\frac{M}{M'}\omega_1 \cos\gamma, \\
Rq_0 - Rq_1 &= fk\omega_1 \cos\gamma, \\
Rq'_0 - Rq'_1 &= fk'\frac{M}{M'}\omega_1 \cos\gamma, \\
Rp_0 - Rp_1 &= -fk\omega_1 \sin\gamma, \\
Rp'_0 - Rp'_1 &= -fk'\frac{M}{M'}\omega_1 \sin\gamma.
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Au degré d'approximation convenu, la perte de force vive éprouvée

par les billes après le choc a pour valeur

$$M\omega_1\left\{2\chi_0 - \omega_1\left(1 + \frac{M}{M'}\right)\right.$$
$$\left. + 2f\cos\gamma[\chi_0 - \chi'_0 + R(q_0 + q'_0) - 2f\sin\gamma R(p_0 + p'_0)]\right\}.$$

Les pertes de forces vives des deux mobiles dues aux vitesses perdues étant $M\omega_1^2$, $M\frac{M}{M'}\omega_1^2$, on trouve, en opérant comme au numéro précédent, que l'équation des forces vives se réduit à

$$(14)\qquad \omega_1\left(1 + \frac{M}{M'}\right)(1 + \varepsilon) = A + 2fw,$$

A étant une constante dépendant uniquement des éléments du mouvement au commencement du choc et dont il est inutile d'écrire l'expression.

On a aussi

$$(14')\qquad 2\omega\left(1 + \frac{M}{M'}\right) = A + 2fw,$$

d'où

$$\omega_1 = \frac{2\omega}{1 + \varepsilon}.$$

Nous avons trouvé plus haut (n° **12**)

$$\omega = \frac{\chi_0 - \chi'_0}{1 + \frac{M}{M'}},$$

par suite

$$(15)\qquad \omega_1 = \frac{2(\chi_0 - \chi'_0)}{1 + \frac{M}{M'}}.$$

Les formules (11), (12), (13) feront connaître dès lors tous les éléments du mouvement après le choc.

Dans la pratique du jeu de billard, la masse M' est en repos avant le

choc, et l'on devra dans ce cas supprimer toutes les lettres affectées en même temps d'un accent et de l'indice o.

VII. — De l'effet d'un coup de queue sur une bille.

14. Nous admettrons que, lorsque le choc commence, le joueur n'exerce aucune pression sur la queue (ce que font d'ailleurs en général les joueurs d'un certain ordre), que le coup de queue est donné de telle manière qu'il ne se produise pas de percussion sur les mains qui servent de guides au mouvement, et que l'angle aigu formé par l'axe de la queue avec la normale au point de choc soit intérieur à l'angle de frottement [1]. De la dernière de ces conditions résulte que l'action mutuelle tangentielle au point de choc est inférieure au frottement de glissement; s'il n'en était pas ainsi, la queue glisserait sur la bille, ou l'on ferait *fausse queue*, et l'on ne peut tirer aucun parti sérieux des coups de cette nature.

Lorsque la queue est inclinée sur le tapis, comme nous le supposerons pour plus de généralité, il se produit simultanément deux chocs, l'un de la queue sur la bille, l'autre de la bille sur le tapis. Nous admettrons avec Coriolis que la vitesse normale que pourrait prendre la bille par suite de l'élasticité du tapis est assez petite pour qu'on puisse en faire abstraction, ce qui a réellement lieu pour les coups ordinaires et lorsque la queue n'est pas trop inclinée sur le tapis. Nous n'aurons pas ainsi à tenir compte de l'équation du mouvement de translation vertical de la bille.

Soient

M' la masse de la queue, et i l'inclinaison de son axe sur le tapis;
M la masse de la bille;
μ le rapport $\frac{M'}{M}$ qui diffère généralement peu de trois unités;

---

(1) Selon la manière dont le *procédé* (tampon en peau de buffle, ayant à peu près la forme d'une calotte sphérique, ajouté au bout de la queue) est plus ou moins bien enduit de matière crayeuse, le coefficient de ce frottement varie entre 0,50 et 0,20, ce qui correspond aux angles de frottement de 26°34′ et 11°20′.

f le coefficient de frottement de la bille sur le tapis [1];

Cz, Cx la verticale du centre I de la bille et l'horizontale de ce point, compris dans le plan vertical mené par Cz parallèlement à la direction de l'axe de la queue;

a, b, c les coordonnées du point de choc parallèles à Cx, Cy, Cz.

Soient de plus, à un instant quelconque du choc,

V' la vitesse de la queue;

v_x, v_y les composantes parallèles à Cx, Cy de la vitesse de glissement v de la bille sur le tapis;

F l'action exercée par la queue sur la bille, la pression sur le tapis étant par suite $F \sin i$

En dehors de ces nouvelles notations, nous conserverons celles dont nous avons fait usage dans ce qui précède.

Nous avons les relations

$$v_x = \chi - pR, \quad v_y = \eta + nR, \tag{1}$$

et les équations

$$\left\{\begin{aligned}
M' \frac{dV}{dt} &= -F, \\
M \frac{d\chi}{dt} &= F\left(\cos i - f\frac{v_x}{v}\cos i\right), \\
M \frac{d\eta}{dt} &= -f\frac{v_y}{v} F \sin i, \\
M \frac{R^2}{k}\frac{dr}{dt} &= -F\left(b + f\frac{v_y}{v}R\right)\sin i, \\
M \frac{R^2}{k}\frac{dp}{dt} &= F\left(c\cos i + f\frac{v_x}{v}R\sin i\right), \\
M \frac{R^2}{k}\frac{dq}{dt} &= -bF\cos i.
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

---

[1] Nous avons vu que ce coefficient pouvait être pris égal à 0,25.

ou

$$(3)\quad \begin{cases} d\chi = -\mu\left(\cos i - f\dfrac{v_x}{v}\sin i\right).dV', \\ d\eta = \mu f\dfrac{v_y}{v}\sin i.dV', \\ \dfrac{R^2}{k}dn = \mu\left(b + f\dfrac{v_y}{v}R\right)\sin i.dV', \\ \dfrac{R^2}{k}dp = \mu\left(c\cos i + f\dfrac{v_x}{v}R\sin i\right).dV', \\ \dfrac{R^2}{k}dq = \mu b\cos i.dV'. \end{cases}$$

En désignant par γ l'angle que forme la vitesse de glissement v avec Cx, nous avons

$$(4)\quad \begin{cases} v_x = \chi - pR = v\cos\gamma, \quad v_y = \eta + nR = v\sin\gamma, \\ \eta + nR = (\chi - pR)\tang\gamma. \end{cases}$$

Nous allons essayer de voir si, en supposant l'angle γ constant, on peut satisfaire aux équations (3). Substituons, à cet effet, dans la relation

$$d\eta + R\,dn = (d\chi - R\,dp)\tang\gamma,$$

les valeurs des différentielles qu'elle renferme et qui sont données par les équations ci-dessus; nous trouvons

$$(5)\quad \tang\gamma = \frac{kb\tang i}{kc - R};$$

l'angle γ est ainsi constant, comme nous l'avons supposé.

Les équations (3) s'intègrent alors immédiatement et, en posant,

$$(6)\quad \omega_1 = V'_0 - V'_1,$$

elles donnent

$$(7)\quad \begin{cases} \chi_1 = \mu(\cos i - f\cos\gamma\sin i)\omega_1, \\ \eta_1 = -\mu f\sin\gamma\sin i.\omega_1, \\ \dfrac{R^2 n_1}{k} = -\mu(b + fR\cos\gamma\sin i)\omega_1, \\ \dfrac{R^2 p_1}{k} = \mu(c\cos i + fR\cos\gamma\sin i)\omega_1, \\ \dfrac{R^2 q_1}{k} = -\mu b\cos i.\omega_1. \end{cases}$$

La force vive totale perdue après le choc a pour expression

$$a \qquad M'\omega_1(2V_0 - A\omega_1),$$

en posant

$$8 \qquad \left\{ \begin{aligned} A = 1 + \mu \Big\{ & \cos i - f\cos\gamma\sin i\Big)^2 + f^2\sin^2\gamma\sin^2 i \\ & + \frac{k^2}{R}\Big[\Big(b + fR\Big)^2\sin^2 i + \Big(c\cos i + R\cos\gamma\sin i\Big)^2 + b^2\cos^2 i\Big]\Big\}. \end{aligned} \right.$$

Les forces vives dues aux vitesses perdues de la bille et de la queue, multipliées par les coefficients de rendement ε et ε', ont respectivement pour valeurs

$$b \qquad \varepsilon M'(A - 1)\omega_1^2,$$

$$c \qquad \varepsilon' M'\omega_1^2(1).$$

Désignons par ψ l'angle formé par F avec sa projection sur le plan tangent au point du choc; par ϖ la vitesse de glissement, à l'instant de la plus grande compression, de la bille sur la queue estimée suivant cette projection, et par ϖ' la vitesse de glissement, au même instant de la bille sur le tapis. Nous avons, eu égard à la première des formules (2),

$$d \qquad \left\{ \begin{aligned} & -2\varpi' f F\cos\psi\, dt = 2\varpi' M'\cos\psi\,\omega_1, \\ & 2\varpi' f f F\sin i\, dt = -2\varpi' M' f\sin i.\omega_1. \end{aligned} \right.$$

La quantité a devant être égale à la somme des expressions b, c, d, il vient

$$9 \qquad 2V_0 = [A + \varepsilon(A - 1) + \varepsilon']\omega_1 - 2\varpi'\cos\psi - 2\varpi' f\sin i.$$

Supprimons l'indice 1 pour caractériser les éléments du mouvement

(1) On a vu au n° 5 que l'on pouvait prendre $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon' = 0{,}27$.

qui se rapportent à l'instant de la plus grande compression pour lequel nous devrons prendre $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, nous aurons aussi

$$(9) \qquad 2V'_0 - 2A\omega = 2\omega' \cos\psi - 2\omega' f \sin i,$$

d'où

$$(10) \qquad \omega_1 = \frac{2A\omega}{A + (A-1)\varepsilon + \varepsilon'}.$$

Soit φ l'angle formé par l'axe de la queue avec la normale au point de choc; on a

$$(11) \qquad \cos\varphi = -\frac{(a\cos i + c\sin i)}{R},$$

et, en exprimant que, à l'instant ci-dessus, les composantes normales des vitesses de la bille et de la queue au point de choc sont égales,

$$V' \cos\varphi = -\left(\chi \frac{a}{R} + \eta \frac{b}{R}\right),$$

ou, en vertu des deux premières équations du groupe (7) et de l'équation (6),

$$(V'_0 - \omega)\cos\varphi = -\mu[(\cos i - f\cos\gamma\sin i)a - fb\sin\gamma\sin i]\frac{\omega}{R},$$

d'où

$$(12) \qquad \omega = \frac{V'_0 \cos\varphi}{\cos\varphi + \frac{\mu}{R}[bf\sin\gamma\sin i - a(\cos i - f\cos\gamma\sin i)]},$$

valeur que l'on devra substituer dans l'équation (10), et les équations (6) et (7) feront connaître par la suite tous les éléments du mouvement après le choc.

Nous ferons remarquer, en terminant, que, d'après la première des équations du groupe (7), le mouvement du centre de la bille parallèle

a Cx sera direct ou rétrograde selon que l'on aura

$$\cos\gamma \lessgtr f\cos i,$$

et il est clair que la seconde de ces circonstances ne pourra se présenter que lorsque la queue sera assez fortement inclinée sur le tapis, ce qui est conforme à l'observation.

Mémoire sur la théorie des équations numériques,

PAR M. LAGUERRE.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I. — RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES.

1. La règle des signes de Descartes consiste dans les deux propositions suivantes :

$F(x)$ désignant un polynôme ordonné suivant les puissances de x, le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$ est au plus égal au nombre des variations du polynôme $F(x)$.

Si le nombre des racines positives est inférieur au nombre des variations du polynôme, la différence est un nombre pair.

Pour établir la première proposition, je démontrerai que, si elle est vraie quand le polynôme qui forme le premier membre de l'équation présente $(m-1)$ variations, il est également vrai quand ce polynôme présente m variations. La proposition sera, par suite, établie dans toute sa généralité, puisqu'elle a lieu évidemment dans le cas où tous les termes du polynôme sont de même signe.

Soit donc

$$F(x) = Ax^p + \ldots + Mx^r + Nx^s + \ldots + Rx^n.$$

un polynôme ordonné suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x et présentant m variations. L'équation

$$F(x)x^{-\alpha} = 0,$$

où α désigne un nombre réel arbitraire, a les mêmes racines positives que l'équation

$$(1) \qquad F(x) = 0,$$

et la fonction qui constitue son premier membre demeure finie et continue, quand x croît indéfiniment à partir d'un nombre positif ε aussi petit qu'on le veut. On peut donc appliquer le théorème de Rolle entre les limites 0 et $+\infty$, et l'on voit que le nombre des racines de l'équation (1) est au plus supérieur d'une unité au nombre des racines de l'équation $x^{-(\alpha+1)}[xF'(x) - \alpha F(x)] = 0$, ou encore de l'équation

$$(2) \qquad xF'(x) - \alpha F(x) = 0.$$

Les coefficients de cette équation sont respectivement

$$A(p-\alpha), \ldots, M(r-\alpha), N(s-\alpha), \ldots, R(u-\alpha).$$

Le polynôme $F(x)$ présentant m variations, supposons que M et N soient de signes contraires, et choisissons le nombre arbitraire α de telle sorte qu'il se trouve compris entre les nombres r et s; on voit que, dans la suite précédente, les coefficients numériques des quantités A, ..., M et ceux des quantités N, ..., R sont de signe contraire.

Le premier membre de l'équation (2) présente donc autant de variations que la suite

$$A, \ldots, M, -N, \ldots, -R,$$

c'est-à-dire $(m-1)$ variations; il en résulte que cette équation a au plus $(m-1)$ racines positives et l'équation (1) au plus m racines positives. La proposition I est donc complètement établie.

Pour démontrer la proposition II, il suffit, comme on sait, de remar-

quer que le nombre des racines positives de l'équation (1) et le nombre des variations du polynôme $F(x)$ sont toujours de même parité.

2. La démonstration précédente ne suppose en aucune façon que les exposants $p, n, r, s, \ldots$ sont des nombres entiers; ils peuvent être fractionnaires ou même incommensurables.

Ainsi l'équation

$$x^3 - x^2 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{7}} - 1 = 0,$$

présentant trois variations, a au plus trois racines positives; il est clair, du reste, qu'elle ne peut avoir de racine négative.

On peut supposer également que $F(x)$ soit une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x. Si elle est convergente pour toutes les valeurs positives de x plus petites qu'un nombre donné a, en cessant d'être convergente pour $x = a$, il résulte de la démonstration précédente que *le nombre des valeurs positives de x, pour lesquelles la série $F(x)$ est convergente et a pour valeur zéro, est au plus égal au nombre des variations de la série.*

De plus, *si le nombre des valeurs de x qui jouissent de cette propriété est inférieur au nombre des variations de la série, la différence est un nombre pair.*

En effet, le nombre des variations des termes de la série étant supposé fini (ce qu'il faut nécessairement supposer pour pouvoir appliquer le théorème précédent), $F(x)$ est égal à un polynôme $\Phi(x)$ suivi d'un nombre indéfini de termes ayant tous le signe du dernier terme de $\Phi(x)$. Pour $x = 0$, la série a le signe du premier terme de $\Phi(x)$. Quand x tend vers la valeur a, $\Phi(x)$ tend vers une valeur finie; les termes complémentaires, qui sont en nombre infini, ont tous le signe du dernier terme de $\Phi(x)$, et leur valeur absolue va en croissant indéfiniment, puisque la série est divergente pour $x = a$.

Donc, quand x s'approche indéfiniment de a, la série de $\Phi(x)$ croît indéfiniment en valeur absolue en gardant le signe du dernier terme de $\Phi(x)$; le nombre des variations de la série et le nombre des racines considérées sont par suite de même parité, d'où résulte immédiatement la proposition susénoncée.

Des considérations toutes semblables s'appliquent au cas où $F(x)$

est une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, et encore à celui où $F(x)$ est une série procédant à la fois suivant les puissances croissantes et suivant les puissances décroissantes de la variable.

5. Soit

$$(3) \qquad f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

un polynôme entier du degré m; je considérerai la suite des polynômes

$$\begin{aligned}
f_m(x) &= A_0, \\
f_{m-1}(x) &= A_0 x + A_1, \\
f_{m-2}(x) &= A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_1(x) &= A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m+2} + \ldots + A_{m-1}, \\
f(x) &= A_0 x_m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,
\end{aligned}$$

dont le dernier est précisément le polynôme donné.

Les valeurs que prennent ces polynômes, pour une valeur donnée de la variable égale à a, se calculent facilement par voie récurrente; on a, en effet, la relation bien connue

$$f_i(a) = a f_{i+1}(a) + A_{m-i},$$

et les quantités $f_m(a)$, $f_{m-1}(a)$, ..., $f_1(a)$, $f(a)$ se rencontrent d'elles-mêmes quand on veut obtenir le résultat de la substitution de a dans $f(x)$.

Cela posé, on peut énoncer la proposition suivante :

Si a est un nombre positif, le nombre des variations des termes de la suite

$$f_m(a),\ f_{m-1}(a),\ f_{m-2}(a),\ \ldots,\ f_1(a),\ f(a),$$

est au plus égal au nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont supérieures à a, et, s'il est plus grand, la différence de ces deux nombres est un nombre pair.

Pour la démontrer, je considère l'identité

$$\frac{f(x)}{x-a} = f_m(a)x^{m-1} + f_{m-1}(a)x^{m-2} + \ldots + f_1(a) + \frac{f(a)}{x-a};$$

pour des valeurs de x supérieures à a, le second membre est développable en une série convergente procédant suivant les puissances décroissantes de x, et l'on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x-a} &= f_m(a)x^{m-1} + f_{m-1}(a)x^{m-2} + \ldots \\ &\quad + f_1(a) + \frac{f(a)}{x} + \frac{af(a)}{x^2} + \frac{a^2 f(a)}{x^3} + \ldots.\end{aligned}$$

Le nombre des valeurs de x pour lesquelles la série est convergente et a pour valeur zéro est précisément le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont plus grandes que a; ce nombre, en vertu de la proposition fondamentale que j'ai démontrée plus haut, est au plus égal au nombre des variations du second membre, lequel se réduit évidemment au nombre des variations des termes de la suite

$$f_m(a),\ f_{m-1}(a),\ f_{m-2}(a),\ \ldots,\ f_1(a),\ f(a).$$

d'où résulte le théorème énoncé précédemment.

Comme application, je considérerai l'équation

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0.$$

Elle n'a pas de racines négatives; en calculant successivement le résultat de la substitution dans le premier membre des nombres 1, 2 et 3, on forme le tableau suivant :

x	$f_5(x)$	$_3(x)$	$f_2(x)$	$f_1(x)$	$f(x)$
$+1$	$+1$	-2	-1	-9	-19
$+2$	$+1$	$+1$	$+3$	-2	-14
$+3$	$+1$	$+6$	$+19$	$+49$	$+137$

Tous les nombres relatifs à $+3$ étant positifs, on en conclut d'abord qu'il n'y a aucune racine de l'équation qui soit supérieure à $+3$; de

plus, les nombres relatifs à $+2$ présentant une seule variation, on est certain qu'il y a une racine comprise entre $+2$ et $+3$ et qu'il n'y en a qu'une. D'ailleurs, les nombres relatifs à $+1$ ne présentant non plus qu'une variation, on en conclut qu'il n'y a qu'une racine supérieure à $+1$: c'est précisément celle que nous avons séparée; si enfin on considère la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$10x^5 + 8x^4 - x^3 + 3x^2 - 1 = 0,$$

la substitution de $+1$ donne la suite de nombres $+10$, $+18$, $+17$, $+20$, $+19$, qui ne présente aucune variation. L'équation n'a donc aucune racine inférieure à $+1$ et, par suite, a une seule racine positive comprise entre $+2$ et $+3$.

4. La proposition précédente peut encore s'énoncer d'une autre façon.

Le nombre a étant positif, il est clair que les quantités

$$A_0 a^m,\ A_0 a^m + A_1 a^{m-1},\ A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2},\ \ldots$$

ont respectivement le même signe que les quantités $f_m(a)$, $f_{m-1}(a)$, $f_{m-2}(a)$, ...; nous pouvons donc dire que le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal au nombre des variations des termes de la suite

$$A_0 a^m,\ A_0 a^m + A_1 a^{m-1},\ \ldots,\ A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots + A_{m-1} a + A_m.$$

En général, $P + Q + R + S + \ldots$ désignant une suite quelconque de termes, j'appellerai nombre des *alternances* de cette suite le nombre des variations de la suite

$$P,\ P + Q,\ P + Q + R,\ P + Q + R + S,\ \ldots$$

Cette définition étant posée, le théorème précédent peut s'énoncer de la façon suivante :

Soit le polynôme

$$F(x) = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots + Lx^{\lambda},$$

où le second membre est ordonné suivant les puissances décroissantes de x, le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$, qui sont supérieures au nombre positif a, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$Aa^{\alpha} + Ba^{\beta} + Ca^{\gamma} + \ldots + La^{\lambda},$$

et si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

La démonstration que j'ai donnée de ce théorème suppose évidemment que les nombres α, β, γ, ..., sont entiers et positifs, mais il est facile de voir que cette restriction est inutile.

En premier lieu, si quelques-uns étaient négatifs, en multipliant $F(x)$ par une puissance de x convenablement choisie (ce qui n'altère pas le nombre des racines positives de l'équation), on pourrait rendre tous ces exposants positifs.

En second lieu, si quelques-uns des nombres α, β, γ, ... étaient fractionnaires, on pourrait les rendre entiers en changeant x en x^{ω}, ω étant le plus petit commun multiple des dénominateurs des nombres α, β, γ, ... La proposition a donc lieu, même quand les exposants sont négatifs ou fractionnaires, et, par un raisonnement connu, on en déduit qu'elle subsiste encore lorsque les exposants sont incommensurables.

Rien n'empêche même de supposer que le nombre des termes de la fonction $F(x)$ soit illimité, pourvu que la série composée de ses termes soit convergente pour $x = a$.

5. On peut chercher une limite du nombre des racines positives d'une équation $f(x) = 0$, qui sont inférieures à un nombre positif a, en considérant l'expression $\frac{f(x)}{a - x}$ qui, pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et a, est développable en une série procédant suivant les puissances croissantes de la variable. La marche à suivre est exactement celle que j'ai suivie précédemment et, sans m'arrêter aux détails

de la démonstration, j'énoncerai de suite la proposition fondamentale suivante :

Étant donné le polynôme

$$F(x) = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots + Lx^{\lambda},$$

où le second membre est ordonné suivant les puissances croissantes de x et où d'ailleurs les exposants sont des quantités réelles quelconques, positives ou négatives, commensurables ou incommensurables, le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$, qui sont inférieures à un nombre positif donné a, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$Aa^{\alpha} + Ba^{\beta} + Ca^{\gamma} + \ldots + La^{\lambda},$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Cette proposition subsiste quand le nombre des termes de $F(x)$ est illimité, pour que la série composée de ces termes soit convergente pour $x = a$; le nombre de ces variations sera du reste évidemment fini, si la série tend, pour $x = a$, vers une limite différente de zéro.

Je mentionnerai, comme cas particulier et à cause de son importance dans les applications, le corollaire suivant :

Le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$, qui sont comprises entre 0 et $+1$, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$A + B + C + \ldots + L,$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

---

(1) Le cas où $F(x)$ est ordonné suivant les puissances décroissantes de x donne également lieu à la proposition suivante :

Le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$ qui sont supérieures à l'unité est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$A + B + C + \ldots + L,$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

6. Soit $f(x)$ un polynôme entier et posons.

$$F(x) = f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{1.2}f''(a) + \ldots;$$

h désignant un nombre positif, il résulte de ce qui précède que le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$ qui sont comprises entre 0 et h, ou, en d'autres termes, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre a et $a+h$, est au plus égal au nombre des alternances de l'expression

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots.$$

En posant

$$F(x) = f(a-x) = f(a) - xf'(a) + \frac{x^2}{1.2}f''(a) + \ldots,$$

on verrait de même que, h étant une quantité positive, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre a et $a-h$, est au plus égale au nombre des alternances de la suite

$$f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots.$$

On peut donc énoncer cette proposition :

$f(x)$ étant un polynôme entier, a et h deux nombres quelconques positifs ou négatifs, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre a et $a+h$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots.$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Remarque. — Considérons les diverses quantités

$$f(a),\ f(a) + hf'(a),\ f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a),\ \ldots,$$

dont la dernière est précisément $f(a+h)$, et soient respectivement P et Q la plus petite et la plus grande d'entre elles; toutes les expressions

$$f(a) - \mathrm{P},\ f(a) - \mathrm{P} + hf'(a),\ f(a) - \mathrm{P} + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a),\ \ldots,$$

seront positives, il en résulte, si l'on pose $f(x) - \mathrm{P} = \varphi(x)$, que la suite

$$\varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots$$

ne présente pas d'alternance. L'équation $f(x) - \mathrm{P} = 0$ n'a donc aucune racine comprise entre a et $a+h$; on prouverait également qu'il en est de même de l'équation $f(x) - \mathrm{Q} = 0$; d'où cette conclusion importante :

Lorsque x varie depuis $x = a$ jusqu'à $x = a + h$, la valeur du polynôme $f(x)$ demeure constamment comprise entre les nombres P *et* Q.

7. Le théorème précédent n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus générale, qu'il est facile d'établir directement et que l'on peut énoncer de la façon suivante :

$f(x)$ désignant un polynôme entier du degré n, soient ω un nombre arbitraire, a et b deux nombres quelconques ne comprenant pas entre eux le nombre ω; cela posé, si l'on désigne par V *le nombre des alternances que présente la suite*

$$(1)\quad f(x) + (\omega - x)f'(x) + \frac{(\omega - x)^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{(\omega - x)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x),$$

quand on y remplace x par a, et par V′ *le nombre des alternances de cette suite quand on y remplace x par b, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ comprises entre a et b est au plus égal à la valeur absolue de la différence* V − V′. *Si les nombres a et b comprennent ω, le nombre des racines comprises entre a et b est au plus égal à la somme* V + V′; *dans les deux cas, la différence des deux nombres, si elle existe, est un nombre pair.*

Pour établir cette proposition, je remarquerai qu'en posant, pour abréger,

$$U_0 = f(x),\ U_1 = f(x) + (\omega - x) f'(x),\ \ldots,$$
$$U_i = f(x) + (\omega - x) f'(x) + \frac{(\omega - x)^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{(\omega - x)^i}{1.2\ldots i} f^i(x) \ldots,$$
$$U_n = f(\omega),$$

le nombre des alternances de la suite (1), pour une valeur donnée de x, est le nombre des variations des termes de la suite $U_0, U_1, \ldots, U_{i-1}, U_i, U_{i+1}, \ldots, U_n$, dont la dernière est la constante $f(\omega)$. En supposant, pour fixer les idées $a < b < \omega$, examinons comment peut se modifier ce nombre de variations, quand x croît d'une façon continue depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. Soit une fonction intermédiaire U_i, qui s'annule pour une valeur α de x comprise entre a et b; le nombre des variations de la suite ne peut changer que si U_{i-1} et U_{i+1} sont de signe contraire. On a évidemment

$$U_{i+1}(\alpha) = \frac{(\omega - \alpha)^{i+1}}{1.2\ldots(i+1)} f^{i+1}(\alpha),$$

quantité qui a le même signe que $f^{i+1}(\alpha)$.

Un calcul facile donne d'ailleurs

$$U'_i(x) = \frac{(\omega - x)^i}{1.2\ldots i} f^{i+1}(x),$$

d'où l'on voit que $U'_i(\alpha)$ et $U_{i+1}(\alpha)$ sont de même signe. Si donc $U_{i-1}(\alpha)$ et $U_{i+1}(\alpha)$ sont positifs, $U_i(\alpha)$ est également positif et $U_i(x)$ étant croissant, pour $x = \alpha$, passe du négatif au positif, ce qui fait perdre deux variations à la suite considérée. Si, au contraire, $U_{i-1}(\alpha)$ et $U_{i+1}(\alpha)$ sont négatifs, $U_i(x)$ passe du positif au négatif, ce qui fait perdre également deux variations. Il ne peut donc y avoir que des variations perdues, et en nombre pair, si l'une des fonctions intermédiaires s'annule quand x varie depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

Quand la fonction $U_0 = f(x)$ s'annule, on voit qu'il y a toujours une variation de perdue; la proposition est donc démontrée, dans le cas où

a et b sont tous deux inférieurs à ω, et une démonstration entièrement semblable à la précédente s'établira facilement dans les autres cas.

Remarque I. — Si le nombre arbitraire ω est supposé infiniment grand et positif, les fonctions U_0, U_1, U_2, ... ont respectivement les mêmes signes que les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., et l'on retrouve ainsi le théorème de Budan.

Remarque II. — Le nombre ω étant une limite supérieure des racines de l'équation, la proposition précédente donne le nombre exact des racines de l'équation lorsque toutes les racines sont réelles et que les nombres a et b sont inférieurs à ω. La même chose a lieu, toutes les racines de l'équation étant réelles, lorsque ω est une limite inférieure des racines et que a et b sont supérieurs à ω.

8. La méthode que j'ai employée ci-dessus, pour obtenir une limite du nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont supérieures à un nombre positif a, repose sur la remarque suivante, à savoir que l'équation $\frac{f(x)}{x-a} = 0$ a les mêmes racines et que le développement de $\frac{f(x)}{x-a}$ suivant les puissances décroissantes de x est convergent pour toutes les valeurs de x supérieures à a.

Il est clair que j'aurais pu faire également usage du développement de l'expression $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$, où p désigne un nombre entier arbitraire, et il est même facile de prouver que l'on obtiendrait ainsi, en général, une limite plus approchée. En désignant, en effet, par $\Phi(x)$ une série procédant suivant les puissances entières (croissantes ou décroissantes) de x, on démontrera aisément que, α désignant un nombre positif quelconque, l'expression $\Phi(x)(x-\alpha)$ (laquelle est généralement une série, mais qui peut accidentellement se réduire à un polynôme entier) présente au moins autant de variations que la série $\Phi(x)$; la démonstration est entièrement semblable à celle du lemme de Segner sur lequel repose la démonstration que ce géomètre a donnée de la règle des signes de Descartes.

Il en résulte réciproquement que, $F(x)$ désignant un polynôme entier ou une série procédant suivant les puissances entières (croissantes

ou décroissantes de x) et α désignant une quantité quelconque positive, le développement de l'expression $\frac{F(x)}{x-\alpha}$ présente, au plus, autant de variations que le développement de $F(x)$; on peut ajouter que, si les nombres de ces variations sont différents, leur différence est un nombre pair.

La même chose a évidemment lieu si l'on considère l'expression plus générale $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, où $\varphi(x)$ est un polynôme quelconque décomposable en facteurs de la forme $x-\alpha$, α étant réel et positif.

Ayant fait cette remarque importante, je considère l'expression $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$ où $f(x)$ désigne un polynôme entier, a un nombre positif et p un nombre entier arbitraire.

Soient n le nombre des racines de l'équation $f(x)=0$, qui sont supérieures à a, et V le nombre des variations que présente le développement de l'expression précédente, suivant les puissances décroissantes de x; il résulte, des propositions énoncées ci-dessus, que n est au plus égal à V (leur différence, s'il y en a une, étant d'ailleurs un nombre pair); le nombre V ne peut que diminuer quand le nombre entier p augmente : il ne peut pas d'ailleurs diminuer au-dessous d'une certaine limite, puisqu'il doit être toujours supérieur à n.

Le point essentiel dans cette méthode, pour en déduire le nombre n avec le plus d'approximation possible, serait de déterminer exactement cette limite du nombre V, lorsque p grandit indéfiniment; mais cette recherche paraît présenter de grandes difficultés.

Je ferai, de préférence, usage de la proposition suivante :

Si l'on met la fraction $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$ sous la forme suivante :

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots + Lx^\lambda + x^\lambda\left(\frac{\mathfrak{A}}{x-a} + \frac{\mathfrak{B}}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\mathfrak{C}}{(x-a)^p}\right),$$

où les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ vont en décroissant (λ pouvant être négatif), ce qui d'ailleurs peut se faire d'une infinité de manières, le nombre des racines de l'équation $f(x)=0$ qui sont supérieures au nombre positif

a est au plus égal au nombre des variations des termes de la suite

$$A, B, \ldots, L, \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{L},$$

et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Soient, en effet, n le nombre des racines de l'équation proposée qui sont supérieures à a, et V le nombre des variations que présente le développement de $\frac{f(x)}{(x-a)^p}$ suivant les puissances décroissantes de x, on a, comme je l'ai démontré,

$$n \leqq V.$$

Désignons maintenant par V_0 le nombre des variations de la suite

$$A, B, \ldots, L, \mathfrak{A}$$

et par V_1 le nombre des variations que présente le développement en série de l'expression

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{A}}{x-a} + \frac{\mathfrak{B}}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^p};$$

on aura évidemment

$$V = V_0 + V_1.$$

Il résulte de ce qui précède que V_1 est au plus égal au nombre des variations que présente le développement du produit par $(x-a)$ de l'expression (1), c'est-à-dire au nombre des variations du développement de

$$\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{(x-a)} + \frac{\mathfrak{C}}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^{p-1}};$$

en désignant par $V(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ le nombre de variations que présentent les deux quantités $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ (nombre qui est d'ailleurs zéro ou l'unité), par V_2 le nombre des variations que présente le développement de l'expression

$$\frac{\mathfrak{B}}{x-a} + \frac{\mathfrak{C}}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^{p-1}},$$

on aura donc

$$V_1 \leqq V(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + V_2$$

et, de même,

$$V_2 \leqq V(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) + V_3,$$

V_3 désignant le nombre des variations que présente le développement de l'expression

$$\frac{\mathfrak{C}}{(x-a)} + \frac{\mathfrak{D}}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\mathfrak{L}}{(x-a)^{p-2}};$$

d'où l'on déduira sans peine

$$V_1 \leqq V(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + V(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) + \ldots + V(\mathfrak{K}, \mathfrak{L}),$$

et de là résulte immédiatement la proposition énoncée.

9. L'application du théorème précédent se fait de la façon la plus simple dans le cas où a est égal à l'unité, cas auquel se ramène aisément le cas général par un changement de variable, et en faisant usage d'un algorithme qui a déjà été employé par Horner et par Budan.

Cet algorithme consiste à former successivement, et par voie récurrente, les différents coefficients des développements de $\frac{f(x)}{x-1}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^2}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^3}$, $\cdots$ suivant les puissances décroissantes de x.

Soit, pour fixer les idées,

$$f(x) = \alpha_0 x^5 + \alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_5;$$

on écrira d'abord (Tableau A) les coefficients de cette équation (les coefficients des puissances qui manquent étant remplacés par des zéros), en les faisant suivre d'une suite indéfinie de zéros.

Au-dessous, dans une première ligne horizontale, on écrira une suite de nombres a_0, a_1, a_2, ..., dont le premier est α_0, chacun des suivants étant formé en additionnant le terme précédent avec le terme de la

suite précédente qui se trouve dans la même colonne verticale, en sorte que $a_1 = a_0 + \alpha_1$, $a_2 = a_1 + \alpha_2$, ...; on voit ainsi qu'à partir du terme a_4 les termes suivants a_5, a_6, a_7, ... sont tous égaux entre eux. Les nombres ainsi obtenus sont, comme il est facile de le voir, les coefficients du développement de $\frac{f(x)}{x-1}$ suivant les puissances décroissantes de x.

Au-dessous, dans une deuxième ligne horizontale, on écrira une suite de nombres b_0, b_1, b_2, ... déduits des nombres a_0, a_1, a_2, ... comme ceux-ci l'ont été de α_0, α_1, α_2, ..., en sorte que

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = b_0 + a_1, \quad b_2 = b_1 + a_2, \quad \ldots;$$

ces divers nombres sont les coefficients du développement de $\frac{f(x)}{(x-1)^2}$ suivant les puissances décroissantes de x.

En poursuivant en observant la même loi, on formera une suite de lignes horizontales

$$\begin{array}{cccccc} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots, \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \ldots, \\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \end{array}$$

dont les divers termes donneront les coefficients des développements $\frac{f(x)}{(x-1)^3}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^4}$, $\frac{f(x)}{(x-1)^5}$, ..., suivant les puissances décroissantes de x.

Si, en particulier, on considère les nombres a_5, b_4, c_3, d_2, e_1, f_0, il est aisé de voir qu'à des facteurs numériques près positifs, ils sont égaux à $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, $f'''(1)$, $f^{\text{iv}}(1)$, $f^{\text{v}}(1)$; c'est dans le but de former ces nombres d'une façon commode et rapide que Budan faisait usage du Tableau précédent, et il résulte de son théorème que le nombre des variations, présenté par la suite de ces termes, donne une limite supérieure du nombre des racines de l'équation qui sont supérieures à l'unité. Mais, on peut faire usage de ce Tableau d'une infinité de manières et souvent d'une façon plus avantageuse.

Tableau A.

α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	0	0	0	...
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	...
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	...
c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	...
d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	...
e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	...
f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	...
g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	...

En se reportant, en effet, à la façon dont a été construit ce Tableau, on voit sans peine que l'on a les identités suivantes :

$$\frac{f(x)}{(x-1)^3} = c_0 x^2 + c_1 x + c_2 + \frac{c_3}{x-1} + \frac{b_4}{(x-1)^2} + \frac{a_5}{(x-1)^3},$$

$$\frac{f(x)}{(x-1)^4} = d_0 x + d_1 + \frac{d_2}{x} + \frac{d_3}{x^2} + \frac{d_4}{x^2(x-1)}$$
$$+ \frac{c_5}{x^2(x-1)^2} + \frac{b_6}{x^2(x-1)^3} + \frac{a_7}{x^2(x-1)^4};$$

d'où résulte, en vertu du théorème énoncé ci-dessus, que le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont supérieures à l'unité, est au plus égal au nombre des variations que présente chacune des deux suites

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ b_4,\ a_5$$

et

$$d_0,\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_5,\ c_4,\ b_6,\ a_7.$$

D'une façon générale, si l'on convient d'appeler diagonale princi-

pale la diagonale qui renferme les nombres a_5, b_4, c_3, d_2, e_1, f_0 et qui donne (à des facteurs numériques près positifs) les valeurs de $f(x)$ et de ses dérivées pour $x = 1$, on peut énoncer la proposition suivante :

Étant formé le Tableau A, *si l'on suit une ligne horizontale quelconque jusqu'à ce que l'on atteigne ou que l'on dépasse le terme correspondant de la diagonale principale et qu'ensuite on parcoure le Tableau obliquement et parallèlement à cette diagonale jusqu'à la première ligne horizontale, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont supérieures à l'unité, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes du Tableau que l'on a rencontrés successivement pendant ce parcours; et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.*

En se reportant au Tableau précédent, on voit ainsi que le nombre des racines positives supérieures à l'unité est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ e_4,\ d_5,\ c_6,\ b_7,\ a_8.$$

10. Quelques exemples ne seront pas inutiles pour éclaircir ce qui précède.

Exemple I. — Soit l'équation $x^3 - 4x + 6 = 0$; pour avoir une limite du nombre des racines supérieures à l'unité, on formera le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & -4 & 6 & 0 \\
\hline
1 & 1 & -3 & 3 & 3 \\
 & & & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
1 & 2 & -1 & 2 & \\
 & & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \\
1 & \cdot\cdot\ 3 & \cdot\cdot\ 2 & & \\
 & \cdot\cdot & & & \\
1 & & & &
\end{array}$$

La diagonale principale donne les termes 1, 3, -1, 3, qui présentent

deux variations; l'application du théorème de Budan indiquerait donc la possibilité de deux racines.

Mais la suite 1, 3, 2, 2, 3, formée en suivant la troisième ligne horizontale jusqu'au terme $+2$ et en remontant parallèlement à la diagonale, n'offre aucune variation; l'équation n'a donc aucune racine supérieure à l'unité.

Pour voir si elle a des racines inférieures à l'unité, considérons la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$6x^3 - 4x^2 + 1 = 0;$$

on formera le Tableau suivant :

6	-4	0	1
0	2	2	3

qui montre immédiatement que l'équation proposée n'a pas de racines positives; l'application de la règle des signes de Descartes à la transformée en $-x$ fait voir d'ailleurs qu'elle a une seule racine négative.

Exemple II. — Soit l'équation

$$x^5 - 5x^3 + 12x^2 - 15x + 9 = 0,$$

qui n'a évidemment aucune racine négative. Pour avoir une limite du nombre des racines supérieures à l'unité, nous formerons le Tableau suivant :

1	-5	12	-15	9	0
1	-4	8	-7	2	2
1	-3	5	-2	0	
1	-2	3	1		
1	-1	2			
1	..	0			

Les termes de la diagonale principale 1, -1, 3, -2, 2 offrent ici

quatre variations, et par suite l'application du théorème de Budan permet de croire à l'existence de quatre racines; mais, la suite 1, 0, 2, 1, 0, 2 ne présentant aucune variation, on en conclut que l'équation n'a aucune racine supérieure à l'unité.

Pour rechercher les racines inférieures à l'unité, je considère la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$9x^4 - 15x^3 + 12x^2 - 5x + 1 = 0,$$

qui donne le Tableau suivant :

9	−15	12	−5	1
9	−6	6	1	2
9	3	9	10	

comme la suite 9, 3, 9, 10, 2 n'a pas de variations, on voit que l'équation donnée n'a pas de racine positive inférieure à l'unité; toutes ses racines sont donc imaginaires.

Exemple III. — Soit l'équation $x^4 - 3x^3 + 9x - 9 = 0$, la transformée en $-x$,

$$x^4 + 3x^3 - 9x - 9 = 0,$$

montre immédiatement qu'elle a une seule racine négative. Pour avoir une limite du nombre des racines positives supérieures à l'unité, je forme le Tableau suivant :

1	−3	0	9	−9				
1	−2	−2	7	−2	−2	−2	−2	−2
1	−1	−3	4	2	0	−2	−4	
1	0	−3	1	3	3	1		
1	1	−2	−1	2	5			
1	2	0	−1	1				
1	3	3	2					

Les termes de la diagonale principale présentent trois variations, mais, la suite

$$1,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 5,\ 1,\ -4,\ -2$$

n'en présentant qu'une, on voit que l'équation proposée a une seule racine supérieure à l'unité.

A l'égard des racines positives inférieures à l'unité, je considérerai la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$9x^4 - 9x^3 + 4x - 1 = 0$$

qui donne le Tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc} 9 & -9 & 4 & -1 \\ \hline 9 & 0 & 4 & 3 \end{array},$$

d'où l'on conclut que l'équation n'a pas de racines inférieures à l'unité.

11. Soit $f(x)$ un polynôme entier; en désignant par ω une quantité positive et par m un nombre entier arbitraire, considérons le développement, suivant les puissances croissantes de x, de la fraction

$$\frac{f(x)}{\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^m}.$$

Soit V le nombre des variations de ce développement; il résulte de ce qui précède que le nombre V ne peut que diminuer quand le nombre m augmente; il est d'ailleurs, au moins, égal au nombre p des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, qui sont inférieures à ω. Cela posé, faisons croître indéfiniment les nombres ω et m, de telle sorte que le rapport $\frac{m}{\omega}$ ait pour limite un nombre donné positif z; $\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^m}$ ayant pour limite e^{zx}, on peut énoncer la proposition suivante :

z désignant un nombre positif, le nombre V des variations que présente le développement de $e^{zx} f(x)$ suivant les puissances croissantes de x

ne peut que diminuer, quand z augmente, et il est au moins égal au nombre p des racines positives de l'équation $f(x) = 0$.

Soient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

et

$$e^{zx} f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 \frac{x^2}{1.2} + A_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

on trouve aisément

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = a_0 z + a_1, \quad A_2 = a_0 z^2 + 2a_1 z + 2a_2, \quad \ldots,$$

et, en général,

$$A_i = a_0 z^i + i a_1 z^{i-1} + i(i-1) a_2 z^{i-2} + i(i-1)(i-3) a_3 z^{i-3} + \ldots.$$

D'où l'on voit, z étant positif, que A_i est de même signe que l'expression

$$a_0 z^n + i a_1 z^{n-1} + i(i-1) a_2 z^{n-2} + i(i-1)(i-2) a_3 z^{n-3} + \ldots;$$

si donc on forme le polynôme

$$\begin{aligned} F(x) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} x + a_2 z^{n-2} x(x-1) + \ldots \\ + a_n x(x-1)\ldots(x-n+1), \end{aligned}$$

le nombre V est égal au nombre des variations de la suite

$$F(0), \ F(1), \ F(2), \ \ldots.$$

Posons $z = \frac{1}{\omega}$ et, en changeant x en $\frac{x}{\omega}$,

$$(A) \left\{ \begin{aligned} \Phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-\omega) + a_3 x(x-\omega)(x-2\omega) + \ldots \\ + a_n x(x-\omega)\ldots(x-\overline{n-1}\,\omega), \end{aligned} \right.$$

V est aussi égal au nombre des variations de la suite

$$\Phi(0), \ \Phi(\omega), \ \Phi(2\omega), \ \ldots.$$

En désignant par p' le nombre des racines positives de l'équation

$\Phi(x) = 0$, on a d'ailleurs $V \geqq p'$; d'où, en vertu de la relation $V \geqq p$,

$$p' \geqq p.$$

Ainsi l'équation $\Phi(x) = 0$ a au moins autant de racines positives que l'équation $f(x) = 0$; en particulier, si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et positives, il en est de même de l'équation

$$\Phi(x) = 0.$$

Je remarquerai, de plus, que, V étant dans ce cas égal à p, la substitution dans $\Phi(x)$ des nombres $0, \omega, 2\omega, \ldots$ doit précisément donner p variations; d'où il résulte que, i désignant un nombre entier quelconque, l'équation $\Phi(x) = 0$ a, au plus, une racine comprise entre $i\omega$ et $(i+1)\omega$.

Posons, par exemple,

$$f(x) = (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots + x^n;$$

on aura

$$\Phi(x) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x(x-\omega) + \ldots$$
$$+ x(x-\omega)\ldots(x-\overline{n-1}\omega).$$

On voit que l'équation $\Phi(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et, de plus, qu'on peut toutes les séparer en substituant dans le polynôme $\Phi(x)$ la suite des nombres

$$0, \omega, 2\omega, 3\omega, \ldots.$$

12. Comme je l'ai démontré, le nombre V des variations des termes du développement de $e^{zx}f(x)$ est au moins égal au nombre p des racines positives de l'équation $f(x) = 0$; ce nombre ne peut d'ailleurs que diminuer lorsque z prend des valeurs de plus en plus grandes. On peut se demander si, pour des valeurs suffisamment grandes de z et, par conséquent, pour toutes les valeurs plus grandes, V sera précisément égal à p.

Supposons, ce qu'il est toujours permis de faire, que l'équation

$f(x) = 0$ n'ait pas de racine nulle. De ce que j'ai établi plus haut, il résulte, en supposant z positif, que V est au plus égal au nombre des racines positives de l'équation $\Phi(x) = 0$, où $\Phi(x)$ représente le polynôme qui figure dans l'égalité (A) (n° **11**).

Soit $\omega^k\Theta(\omega)$ le discriminant de ce polynôme; le nombre entier k sera généralement égal à zéro, sauf le cas où l'équation $f(x) = 0$ a des racines égales. Désignons par ω_1 un nombre positif inférieur à la plus petite racine positive de l'équation $\Theta(\omega) = 0$, et faisons varier par degrés insensibles ω, depuis 0 jusqu'à ω_1. L'équation $\Phi(x) = 0$ n'ayant jamais de racine nulle, puisque a_0 est différent de zéro, aucune racine négative ne pourra devenir positive; les racines qui étaient imaginaires pour $\omega = 0$ ne pourront pas devenir positives, car elles ne le pourraient qu'en devenant égales deux à deux, ce qui est impossible, puisque ω est plus petit que ω_1. Il pourrait se faire, si l'équation $f(x) = 0$ a des racines égales, que certaines racines positives multiples devinssent imaginaires; dans tous les cas, p' désignant le nombre des racines positives de l'équation $\Phi_1(x) = 0$, où $\Phi_1(x)$ désigne ce que devient le polynôme $\Phi(x)$ quand on y remplace ω par ω_1, on a $p' \leqq p$.

Or, on a $V \leqq p'$ et, par suite, $\leqq p$; d'autre part $V \geqq p$; de là, résulte $V = p$; ainsi le nombre ω_1 ayant été choisi comme je l'ai dit plus haut, si l'on pose $z = \frac{1}{\omega_1}$, on est assuré que pour cette valeur de z et pour les valeurs plus grandes le nombre des variations que présente le développement de $e^{zx}f(x)$ est exactement égal au nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$.

Ce théorème subsiste évidemment si cette équation, contrairement à ce que j'ai supposé, avait des racines nulles.

Remarque. — De là résulte une méthode entièrement différente de celle de Lagrange et de celle de Sturm pour déterminer exactement le nombre des racines positives d'une équation.

Cette méthode exige seulement le calcul du discriminant $\omega^k\Theta(\omega)$ du polynôme $\Phi(x)$; mais, ce polynôme étant une fonction de la variable ω, le calcul de ce discriminant ne laisse pas que d'être très pénible.

On a ensuite à déterminer une limite inférieure ω_1 des racines positives de l'équation $\Theta(\omega) = 0$ et, cela posé, le nombre des variations

de la suite indéfinie

$$\Phi_1(0),\ \Phi_1(\omega_1),\ \Phi_1(2\omega_1),\ \ldots$$

donne exactement le nombre des racines positives de l'équation proposée.

Bien que ce procédé ne soit guère pratique, j'ai cru cependant devoir le mentionner, eu égard au petit nombre des méthodes qui permettent de déterminer le nombre exact des racines d'une équation qui sont comprises entre deux limites données.

II. — Sur les équations de la forme

$$A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0.$$

15. Soit

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

une série indéfinie ordonnée suivant les puissances croissantes de x, dans laquelle je suppose tous les coefficients positifs ou nuls, le premier étant différent de zéro.

Considérons l'équation

$$(1)\qquad f(x) = A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0,$$

où les α_i désignent des quantités positives que je supposerai rangées par ordre décroissant de grandeur, en sorte que l'on ait

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_{n-1} > \alpha_n.$$

Cela posé, si nous développons en série le second membre de l'équation (1), nous aurons

$$\begin{aligned} f(x) = {} & a_0 (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \\ & + a_1 (A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + \ldots + A_n \alpha_n) x \\ & + a_2 (A_1 \alpha_1^2 + A_2 \alpha_2^2 + \ldots + A_n \alpha_n^2) x^2 \\ & + a_3 (A_1 \alpha_1^3 + A_2 \alpha_2^3 + \ldots + A_n \alpha_n^3) x^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}$$

et il résulte de la règle des signes de Descartes que le nombre p des racines positives de l'équation (1) [*c'est-à-dire le nombre des quantités positives qui annulent $f(x)$ et pour lequel le développement en série de cette fonction est convergent*] est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la série indéfinie

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 + A_2 + \ldots + A_n, \\ A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n, \\ A_1\alpha_1^2 + A_2\alpha_2^2 + \ldots + A_n\alpha_n^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pour avoir une limite supérieure du nombre de ces variations, arrêtons cette série au terme de rang i,

$$A_1\alpha_1^i + A_2\alpha_2^i + \ldots + A_n\alpha^n,$$

et désignons par V' le nombre des variations que présentent ces $i+1$ premiers termes.

En désignant par V'' le nombre des variations de la série indéfinie

$$A_1\alpha_1^i + A_2\alpha_2^i + \ldots + A_n\alpha_n^i,\ A_1\alpha_1^{i+1} + A_2\alpha_2^{i+1} + \ldots + A_n\alpha_n^{i+1},\ \ldots,$$

on a évidemment $V = V' + V''$.

Or la seconde série se composant des valeurs que prend la fonction

$$\Phi(x) = A_1\alpha_1^i\alpha_1^x + A_2\alpha_2^i\alpha_2^x + \ldots + A_n\alpha_n^i\alpha_n^x,$$

lorsqu'on y fait successivement $x = 0$, $x = 1$, $x = 2, \ldots$, le nombre des variations des termes de cette série est au plus égal au nombre des racines positives de l'équation $\Phi(x) = 0$, ou encore au nombre des racines supérieures à l'unité de l'équation

$$(2)\qquad A_1\alpha_1^i z^{\log\alpha_1} + A_2\alpha_2^i z^{\log\alpha_2} + \ldots + A_n\alpha_n^i z^{\log\alpha_n} = 0,$$

que l'on déduit de la précédente en posant $e^x = z$.

Les nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ allant en décroissant, il en est de même des exposants $\log\alpha_1, \log\alpha_2, \ldots, \log\alpha_n$; il en résulte, en

vertu d'une proposition démontrée plus haut (n° 5), que le nombre des racines de l'équation (2) qui sont supérieures à l'unité est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$A_1\alpha_1^i + A_2\alpha_2^i + \ldots + A_n\alpha_n^i.$$

En désignant par R le nombre de ces alternances, on aura donc

$$V'' \leq R \quad \text{et} \quad V \leq V' + R;$$

d'où encore

$$p \leq V' + R.$$

14. Considérons, en particulier, le cas où l'on arrête la série (A) à son premier terme; il résulte de ce qui précède que p est au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$A_1 z^{\log\alpha_1} + A_2 z^{\log\alpha_2} + \ldots + A_n z^{\log\alpha_n} = 0$$

qui sont supérieures à l'unité, et l'on peut énoncer cette proposition importante :

THÉORÈME I. — *Le nombre des racines positives de l'équation*

$$A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0,$$

où les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des quantités positives rangées par ordre décroissant de grandeur, est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n.$$

15. On aurait pu, d'une façon plus générale, considérer l'équation

$$A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = \Phi(x),$$

où $\Phi(x)$ désigne un polynôme entier. Mais je crois inutile de m'étendre sur ce sujet; ce que j'ai dit plus haut suffit pour faire voir de quelle manière on pourrait traiter cette question.

III. — Sur l'équation $\int_a^b e^{-zx}\Phi(z)\,dz = 0$.

16. Appliquons les résultats précédents au cas où $F(x) = e^x$; le développement de cette fonction est, comme on le sait, convergent pour toutes les valeurs de la variable et ne présente que des coefficients positifs.

Soit l'équation

$$(1)\qquad A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + A_n e^{\alpha_n x} = 0,$$

où les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vont en décroissant et sont, du reste, positifs ou négatifs.

Cette équation a évidemment les mêmes racines que l'équation suivante :

$$A_1 e^{(k+\alpha_1)x} + A_2 e^{(k+\alpha_2)x} + \ldots + A_n^{(k+\alpha_n)x} = 0,$$

où k désigne un nombre positif arbitraire que l'on pourra toujours choisir de telle sorte que les nombres $(k+\alpha_1), (k+\alpha_2), \ldots, (k+\alpha_n)$ soient tous positifs.

En faisant application du théorème I, on en conclut que l'équation (1) a au plus autant de racines positives que la suite

$$(\lambda)\qquad A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

présente d'alternances.

Supposons maintenant que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soient les différents termes d'une progression arithmétique dont la raison soit très petite et dont le premier terme et le dernier terme soient respectivement $-a$ et $-b$; je suppose $a < b$. Les coefficients $A_0, A_1, \ldots$ étant complètement arbitraires, on voit que l'équation peut, quand la raison de la progression tend vers zéro, se mettre sous la forme

$$(2)\qquad \int_a^b e^{-zx}\Phi(z)\,dz = 0,$$

où $\Phi(z)$ désigne une fonction entièrement arbitraire, continue ou

discontinue d'une façon quelconque, pouvant par exemple être nulle dans autant d'intervalles qu'on le veut.

D'autre part, le nombre des alternances de la suite (A) est au plus égal au nombre des racines de l'équation $\int_a^x \Phi(x)\,dx = 0$, qui sont comprises entre a et b (il pourrait lui être inférieur au cas où cette équation aurait dans cet intervalle des racines d'ordre pair de multiplicité); d'où la proposition suivante :

Le nombre des racines de l'équation (2) *est au plus égal au nombre des racines de l'équation* $\int_a^x \Phi(x)\,dx = 0$, *qui sont comprises entre* a *et* b.

On peut évaluer autrement le nombre des alternances de la suite (A); partageons à cet effet l'intervalle compris entre a et b en intervalles tels que, dans chacun d'eux, la fonction $\Phi(x)$ ne soit pas constamment nulle, soit continue et *de même signe*.

On pourra, en posant ainsi

$$\int_a^b e^{-zx}\Phi(z)\,dz$$
$$= \int_a^{a_1} e^{-zx}\Phi_1(z)\,dz + \int_{a_2}^{a_3} e^{-zx}\Phi_2(z)\,dz + \ldots + \int_{a_n}^{b} e^{-zx}\Phi_n(z)\,dz,$$

énoncer la proposition suivante :

Le nombre des racines positives de l'équation (2) *est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$\int_a^{a_1} \Phi_1(x)\,dx + \int_{a_2}^{a_3} \Phi_2(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} \Phi_n(x)\,dx.$$

17. Comme application des théorèmes précédents, posons $a = 0$, $b = \infty$ et

$$\Phi(z) = \frac{a_0}{\Gamma(\alpha_0)} z^{\alpha_0 - 1} + \frac{a_1}{\Gamma(\alpha_1)} z^{\alpha_1 - 1} + \ldots + \frac{a_n}{\Gamma(\alpha_n)} z^{\alpha_n - 1}.$$

où les α_i designent des nombres positifs quelconques et Γ la fonction eulérienne de seconde espèce.

L'équation $\int_0^\infty e^{-zx}\Phi(z)\,dz = 0$ devient

$$\frac{a_0}{x^{\alpha_0}} + \frac{a_1}{x^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{a_n}{x^{\alpha_n}} = 0,$$

et j'observe que le nombre de ses racines positives est précisément égal au nombre des racines positives de l'équation

$$(1) \qquad a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + a_n x^{\alpha_n} = 0.$$

D'autre part, l'équation $\int_0^x \Phi(x)\,dx = 0$ devient

$$(2) \qquad \frac{a_0 x^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0+1)} + \frac{a_1 x^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} + \ldots + \frac{a_n x^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)} = 0,$$

et il résulte de la proposition précédente que le nombre des racines positives de l'équation (1) est au plus égal au nombre des racines positives de l'équation (2).

18. Considérons l'équation du degré n

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0,$$

que je mettrai sous la forme

$$a_0 x^\omega + a_1 x^{1+\omega} + a_2 x^{2+\omega} + \ldots + a_n x^{n+\omega} = 0,$$

où ω désigne un nombre positif ou nul.

Il résulte de ce qui précède que l'équation (1) a au plus autant de racines positives que l'équation

$$\frac{a_0}{\Gamma(\omega+1)} + \frac{a_1 x}{\Gamma(\omega+2)} + \frac{a_2 x^2}{\Gamma(\omega+3)} + \ldots + \frac{a_n x^n}{\Gamma(\omega+n+1)} = 0,$$

ou encore que l'équation

$$(2)\quad a_0 + \frac{a_1 x}{\omega + 1} + \frac{a_2 x^2}{(\omega+1)(\omega+2)} + \ldots + \frac{a_n x^n}{(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+n)} = 0;$$

ω désigne, comme je l'ai dit, une quantité positive quelconque ou zéro.

La même chose a lieu à l'égard des racines négatives, comme il est facile de le voir en considérant les transformées en $-x$. En particulier, on peut énoncer cette propriété importante :

Si l'équation (1) *a toutes ses racines réelles, l'équation* (2) *a également toutes ses racines réelles.*

19. Soit le polynôme $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$; formons le produit

$$e^{zx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = U_0 + U_1 z + U_2 z^2 + \ldots,$$

où les U_i sont des fonctions de z. Comme il est aisé de le prouver, on a généralement $\frac{dU_i}{dz} = U_{i-1}$, en sorte que toutes les fonctions d'indice inférieur à U_i sont les dérivées successives de cette fonction.

On a évidemment

$$U_i = \frac{a_0 x^i}{1.2\ldots i} + \frac{a_1 x^{i-1}}{1.2\ldots(i-1)} + \frac{a^2 x^{i-2}}{1.2\ldots(i-2)} + \frac{a_3 x^{i-3}}{1.2\ldots(i-3)};$$

d'où l'on voit que l'équation $U_i = 0$ a autant de racines réelles distinctes de zéro que l'équation

$$a_3 + \frac{a_2 x}{i-2} + \frac{a_3 x^2}{(i-2)(i-1)} + \frac{a_0 x^3}{(i-2)(i-1)} = 0.$$

Or cette équation a, en vertu du théorème précédent, toutes ses racines, réelles si $i-2$ est plus grand que zéro, et si l'équation $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0$ a elle-même toutes ses racines réelles. L'équation $U_i = 0$ a donc également toutes ses racines réelles, si i est > 2, et la même proposition a lieu à l'égard des équations $U_2 = 0$, $U_1 = 0$, puisque U_2 et U_1 sont les deux premières dérivées de U_3.

Cette démonstration s'étend d'elle-même à un polynôme de degré quelconque; d'où le théorème suivant, qu'il est aisé, du reste, d'établir directement :

Soient $f(x)$ un polynôme quelconque décomposable en facteurs réels du premier degré et $F(x) = e^{zx} f(x) = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \ldots$; cela posé, U_i désignant un des coefficients quelconques de ce développement, l'équation en z

$$U_i = 0$$

a toutes ses racines réelles.

20. $F(x)$ désignant, comme plus haut, la fonction $e^{zx} f(x)$, posons

$$F(x+h) = e^{zh} e^{zx} f(x+h) = V_0 + V_1 x + V_2 x^2 + \ldots,$$

et V_k désignant un quelconque des coefficients de ce développement, $V_k = \varphi(z)$, en sorte que $V_{k-1} = \varphi'(z)$, $V_{k-2} = \varphi''(z)$, ..., l'équation $\varphi(z+t) = 0$ a, quel que soit z, toutes ses racines réelles et elle peut s'écrire

$$\varphi(z) + t\varphi'(z) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(z) + \ldots + \frac{t^k}{1.2\ldots k}\varphi^{(k)}(z) = 0$$

ou

$$V_k + t V_{k-1} + \frac{t^2}{1.2} V_{k-2} + \ldots + \frac{t^k}{1.2\ldots k} V_0 = 0,$$

ou encore

$$\frac{F^{(k)}(h)}{1.2\ldots k} + \frac{F^{(k-1)}(h)}{1.2\ldots(k-1)} + \frac{t^2}{1.2}\frac{F^{(k-2)}(h)}{1.2\ldots(k-2)} + \ldots + \frac{t^k}{1.2\ldots k} F(h) = 0$$

ou enfin, en changeant h en x, t en $\frac{1}{t}$ et en chassant les dénominateurs,

$$F(x) + kF'(x)t + \frac{k(k-1)}{1.2}F''(x)t^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}F'''(x)t^3 + \ldots + F^{(k)}(x)t^k = 0;$$

et l'on voit que cette équation en t a, quel que soit x, toutes ses racines réelles.

Si donc on écrit le système suivant d'équations,

$$F(x) + tF'(x) = 0,$$
$$F(x) + 2tF'(x) + t^2F''(x) = 0,$$
$$F(x) + 3tF'(x) + 3t^2F''(x) + t^3F'''(x) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on voit que, pour toute valeur de x, elles ont leurs racines réelles. Il en serait de même des équations

$$F'(x) + tF''(x) = 0, \quad F'(x) + 2tF''(x) + t^2F'''(x) = 0, \quad \ldots,$$
$$F''(x) + tF'''(x) = 0, \quad F''(x) + 2tF'''(x) + t^2F^{\text{iv}}(x) = 0, \quad \ldots;$$

la dérivée $F(x)$ ayant pour valeur $e^{zx}[f(x) + zf'(x)]$ et l'équation $f(x) + zf'(x) = 0$ ayant toutes ses racines réelles, il est clair en effet que $F'(x)$ est une fonction de la même espèce que $F(x)$, et il en est de même de toutes ses dérivées.

21. Les propositions précédentes s'établissent du reste très facilement quand on les suppose démontrées dans le cas où $F(x)$ est un polynôme entier; il suffit de remarquer que $e^{zx}f(x)$ peut être considéré comme la limite du polynôme $\left(1 + \frac{zx}{n}\right)^n f(x)$, qui est décomposable en facteurs réels du premier degré.

La même chose a lieu à l'égard de la fonction $e^{-ux^2+nzx}f(x)$, où je suppose u positif; cette fonction peut être en effet considérée comme la limite de $\left(1 - \frac{ux^2}{n}\right)^n \left(1 + \frac{zx}{n}\right) f(x)$; mais les propositions précédentes ne s'appliqueraient pas à une fonction de la forme $e^{\varphi(x)}f(x)$, si le polynôme $\varphi(x)$ était d'un degré supérieur au second, ou si, étant du second degré, le coefficient de x^2 était positif

Ces remarques très simples trouveront d'utiles applications dans la théorie des fonctions transcendantes.

22 En effectuant un changement de variable, le théorème établi au n° **18** peut s'énoncer ainsi qu'il suit : *L'équation*

$$(1) \qquad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

ayant toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1x}{\alpha + \omega} + \frac{a_2x^2}{(\alpha + \omega)(2\alpha + \omega)} + \frac{a_3x^3}{(\alpha + \omega)(2\alpha + \omega)(3\alpha + \omega)} + \ldots = 0,$$

où α et ω désignent des quantités positives quelconques, la dernière

pouvant être nulle. De là résulte que, étant donnée une équation ayant toutes ses racines réelles, on peut en déduire une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété; en appliquant une seconde fois le théorème précédent, on voit, par exemple, que l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{(\alpha+\omega)(\alpha'+\omega')} + \frac{a_2 x^2}{(\alpha+\omega)(2\alpha+\omega)(\alpha'+\omega')(2\alpha'+\omega')}$$
$$+ \frac{a_3 x^3}{(\alpha+\omega)(2\alpha+\omega)(\alpha'+\omega')(3\alpha+\omega)(2\alpha'+\omega')(3\alpha'+\omega')} + \ldots = 0$$

a toutes ses racines réelles, α' et ω' étant assujetties aux mêmes conditions que α et ω.

Soit, en général, $\varphi(x)$ un polynôme d'un degré quelconque décomposable en facteurs réels du premier degré et ne devenant jamais négatif pour aucune valeur de la variable, en sorte que $\varphi(x)$ soit de la forme

$$\varphi(x) = x^p(ax+b)^q(a'x+b')^{q'}(a''x+b'')^{q''}, \quad \ldots$$

les nombres p, q, q', q'', ... étant des nombres entiers ou étant égaux à zéro, a, a', a'', ..., et b, b', b'', ... étant des nombres positifs; on verra aisément par ce qui précède que l'équation

$$a_0 + \frac{a_1}{\Theta(1)} + \frac{a_2 x^2}{\Theta(1)\Theta(2)} + \frac{a_3 x^3}{\Theta(1)\Theta(2)\Theta(3)} + \ldots + \frac{a_n x^n}{\Theta(1)\Theta(2)\ldots\Theta(n)} = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Mais on peut donner une plus grande généralité à cette proposition: l'équation (1) ayant en effet toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{1+\omega} + \frac{a_2 x^2}{(1+\omega)(1+2\omega)} + \frac{a_3 x^3}{(1+\omega)(1+2\omega)(1+3\omega)} + \ldots = 0,$$

par suite de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{(1+\omega)^2} + \frac{a_8 x^2}{(1+\omega)^2(1+2\omega)^2} + \frac{a_3 x^3}{(1+\omega)^2(1+2\omega)^2(1+3\omega)^2} + \ldots = 0,$$

et en général de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1 x}{(1+\omega)^k} + \frac{a_2 x^2}{(1+\omega)^k(1+2\omega)^k} + \frac{a_3 x^3}{(1+\omega)^k(1+2\omega)^2(1+3\omega)^k} + \ldots = 0,$$

où k désigne un nombre entier quelconque.

Faisons maintenant croître indéfiniment le nombre arbitraire positif $\frac{1}{\omega}$ et le nombre entier k, de telle sorte que $k\omega$ ait pour limite $\log\frac{1}{q}$, q désignant un nombre positif quelconque égal ou inférieur à l'unité.

L'équation précédente deviendra

$$a_0 + a_1 q x + a_2 q^3 x^2 + a_3 q^6 x^3 + \ldots + a_n q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^n = 0,$$

et elle aura toutes ses racines réelles ; il en est de même de l'équation obtenue en changeant q en ω^2 et x en $\frac{x}{\omega}$,

$$a_0 + a_1 \omega x + a_2 \omega^4 x^2 + a_3 \omega^9 x^3 + \ldots + a_n \omega^{n^2} x^n = 0;$$

ω désigne une quantité réelle quelconque, dont la valeur absolue est au plus égale à l'unité.

Des considérations que je viens d'exposer résulte immédiatement la proposition suivante :

L'équation (1) *ayant toutes ses racines réelles, l'équation*

$$a_0 + \frac{a_1 \omega x}{\Theta(1)} + \frac{a_2 \omega^4 x}{\Theta(1)\Theta(2)} + \frac{a_3 \omega^9 x^3}{\Theta(1)\Theta(2)\Theta(3)} + \ldots + \frac{a_n \omega^{n^2} x^n}{\Theta(1)\Theta(2)\ldots\Theta(n)} = 0,$$

a également toutes ses racines réelles. $\Theta(x)$ désigne un polynôme entier quelconque satisfaisant aux conditions ci-dessus énoncées, et ω une quantité réelle quelconque, dont la valeur absolue est égale ou inférieure à l'unité.

23. Soit, comme application de ce théorème, l'équation

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \ldots + n x^{n-1} + x^n = 0;$$

je poserai, ω et $\Theta(x)$ conservant la même signification que ci-dessus,

$$F(x) = 1 + \frac{n\omega x}{\Theta(1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\omega^5 x^2}{\Theta(1)\Theta(2)} + \ldots + \frac{\omega^{n^2} x^n}{\Theta(1)\Theta(2)\ldots\Theta(n)}.$$

Les polynômes de cette forme jouissent des propriétés remarquables suivantes :

1° L'équation $F(x) = 0$ a toutes ses racines réelles.

2° Les diverses dérivées de $F(x)$ s'expriment au moyen de polynômes de la même espèce.

On a en effet

$$F'(x) = \frac{n\omega}{\Theta(1)}\left[1 + (n-1)\frac{\omega^3 x}{\Theta(2)} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{\omega^8 x^2}{\Theta(2)\Theta(3)}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\frac{\omega^{15} x^3}{\Theta(2)\Theta(3)\Theta(4)} + \ldots + \right].$$

Si donc on pose $\Theta(x+1) = H(x)$ et

$$\Phi(x) = 1 + \frac{(n-1)\omega x}{H(1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{\omega^4 x^2}{H(1)H(2)}$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\frac{\omega^9 x^3}{H(1)H(2)H(3)} + \ldots,$$

il vient

$$F'(x) = \frac{n\omega}{\Theta(1)}\Phi(\omega^2 x);$$

or $\Phi(x)$ est un polynôme de la même espèce que $F(x)$, puisque $H(x)$ est décomposable en facteurs linéaires réels du premier degré et n'est jamais négatif pour aucune valeur positive de x.

Ce que je viens d'établir pour la première dérivée subsiste encore évidemment pour les dérivées suivantes.

3° Si l'on pose, en séparant la partie réelle de la partie imaginaire,

$$F(ix) = V(x) + iW(x),$$

les équations $V(x) = 0$ et $W(x) = 0$ ont toutes leurs racines réelles et, plus généralement, a désignant une constante réelle quelconque,

l'équation

$$V(x) + aW(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que cette équation peut s'écrire

$$1 + \frac{n\omega x}{\theta(1)} a - \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{\omega^4 x^2}{\theta(1)\theta(2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{\omega^9 x^3}{\theta(1)\theta(2)\theta(3)} a + \ldots = 0,$$

et que l'équation

$$\left[1 - \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^4 + \ldots\right] + a\left[nx - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots + \right] = 0$$

a toutes ses racines réelles, quelle que soit la constante réelle a; c'est en effet l'équation qui détermine $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{n}$ quand n se donne $\operatorname{tang} \alpha$.

En particulier, si l'on fait $\theta(x) = x$ et $\omega = 1$, on a

$$F(x) = 1 + \frac{nx}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{x^2}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},$$

polynôme qui se présente dans plusieurs questions intéressantes de l'Analyse [1].

---

[1] Voir à ce sujet un Mémoire de M. Tchebychef (*Mélanges mathématiques et astronomiques*, t. II, p. 182. Saint-Pétersbourg, 1859), ma Note *Sur l'intégrale* $\int_0^x \frac{e^{-x}dx}{x}$ (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 72) et une Note de M. Hâlphen, *Sur une série pour développer les fonctions d'une variable* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 9 octobre 1882).

En faisant en second lieu $\Theta(x) = 1$, on a

$$F_n(x) = 1 + n\omega x + \frac{n(n-1)}{1.2}\omega^4 x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\omega^9 x^3 + \ldots + \omega^{n^2} x^n;$$

les polynômes ainsi définis satisfont à l'équation suivante :

$$F_n(x) = n\omega F_{n-1}(\omega^2 x).$$

24. Un cas particulièrement intéressant est celui où, dans l'équation $\int_a^b e^{-z}\Phi(z)\,dz = 0$, on suppose que $\Phi(z)$ soit un polynôme entier dont la forme change successivement lorsque la variable z croît depuis a jusqu'à b.

Cette équation peut se mettre alors sous la forme suivante :

$$e^{\alpha_0 x} f_0(x) + e^{\alpha_1 x} f_1(x) + \ldots + e^{\alpha_n x} f_n(x) = 0,$$

les α_i désignant des constantes et les f_i des polynômes entiers.

Pour examiner le cas le plus simple, soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des quantités réelles quelconques rangées par ordre croissant de grandeur et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des quantités réelles quelconques ; posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, \\ p_1 &= a_0 + a_1, \\ p_2 &= a_0 + a_1 + a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \end{aligned}$$

et considérons l'équation

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} e^{-zx} p_0\,dz + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{-z} p_1\,dz + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} e^{-z} p_2\,dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{\infty} e^{-z} p_n\,dz = 0.$$

En effectuant les intégrations, il est aisé de voir qu'elle devient simplement

$$a_0 e^{-\alpha_0 x} + a_1 e^{-\alpha_1 x} + a_2 e^{-\alpha_2 x} + \ldots + a_n e^{-\alpha_n x} = 0;$$

et le nombre p de ses racines positives est le même que celui des racines de l'équation

$$a_0 z^{\alpha_0} + a_1 z^{\alpha_1} + a_2 z^{\alpha_2} + \ldots + a_n z^{\alpha_n} = 0,$$

qui sont comprises entre 0 et $+1$. Cette équation résulte en effet de la première quand on y pose $e^{-x} = z$.

On sait d'ailleurs (n° **16**) que le nombre p est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\int_{\alpha_n}^{\infty} p_0 dz + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_1 dz + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} p_2 dz + \ldots + \int_{\alpha_n}^{\infty} p_n dz,$$

d'où les propositions suivantes :

Les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant rangés par ordre croissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation

$$(1) \qquad a_0 z^{\alpha_0} + a_1 z^{\alpha_1} + a_2 z^{\alpha_2} + \ldots + a_n z^{\alpha_n} = 0$$

qui sont comprises entre 0 et $+1$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$(2) \qquad p_0(\alpha_1 - \alpha_0) + p_1(\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + p_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + p_n . \infty \quad (^1),$$

où $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ ont la signification donnée ci-dessus;

et encore (ce qui est le même théorème sous une autre forme) :

Si les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont rangés par ordre décroissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation (1) qui sont plus grandes que l'unité est au plus égal au nombre des alternances de la suite (2).

25. J'ai fait voir plus haut (n° **14**) que le nombre des racines posi-

(1) D'après la définition des alternances d'une suite, il est clair que le nombre des alternances de la suite $a + b + c + d . \infty$ est le nombre des variations des termes de la suite

$$a, \quad a + b, \quad a + b + c, \quad d$$

tives de l'équation

$$(1)\qquad A_0 F(\alpha_0 x) + A_1 F(\alpha_1 x) + A_2 F(\alpha_2 x) + \ldots + A_n F(\alpha_n x) = 0$$

était au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$A_0 z^{\log \alpha_0} + A_1 z^{\log \alpha_1} + \ldots + A_n z^{\log \alpha_n} = 0,$$

qui sont supérieures à l'unité; d'ailleurs les nombres $\log \alpha_0$, $\log \alpha_1, \ldots,$ $\log \alpha_x$ vont en décroissant.

Posons maintenant

$$\begin{aligned} p_0 &= A_0, \\ p_1 &= A_0 + A_1, \\ p_2 &= A_0 + A_1 + A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n; \end{aligned}$$

il résulte, de ce qui précède, que *le nombre des racines positives de l'équation* (1) *est au plus égal au nombre des alternances de la suite*

$$p_0 \log \frac{\alpha_1}{\alpha_0} + p_1 \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \ldots + p_{n-1} \log \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + p_n . \infty .$$

IV. — Sur les équations de la forme.

$$\frac{a_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \frac{a_2}{(x-\alpha_2)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(x-\alpha_n)^\omega} = 0.$$

26. Soit l'équation

$$(1)\qquad \frac{a_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \frac{a_2}{(x-\alpha_2)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(x-\alpha_n)^\omega} = 0,$$

où les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont rangés par ordre décroissant de grandeur et ω un nombre positif arbitraire.

Choisissons un nombre positif k assez grand pour que toutes les

quantités $k+\alpha_0, k+\alpha_1, \ldots, k+\alpha_n$ soient positives et formons la transformée en $y = x + k$,

$$\frac{a_0}{[y-(k+\alpha_0)]^\omega} + \frac{a_1}{[y-(k+\alpha_1)]^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{[y-(k+\alpha_n)]^\omega} = 0,$$

ou, pour abréger l'écriture,

$$\frac{a_0}{(y-\alpha_0)^\omega} + \frac{a_1}{(y-\alpha'_1)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(y-\alpha'_n)^\omega} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(2) \qquad \frac{a_0}{\left(1-\frac{\alpha'_0}{y}\right)^\omega} + \frac{a_1}{\left(1-\frac{\alpha'_1}{y}\right)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{\left(1-\frac{\alpha'_n}{y}\right)^\omega} = 0.$$

Soit

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-\omega} = 1 + \frac{M_1}{y} + \frac{M_2}{y^2} + \frac{M_3}{y^3} + \ldots = F\left(\frac{1}{y}\right),$$

l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$F\left(\frac{\alpha'_0}{y}\right) + F\left(\frac{\alpha'_1}{y}\right) + \ldots + F\left(\frac{\alpha'_n}{y}\right) = 0,$$

où le premier membre est convergent pour toutes les valeurs de y plus grandes que α'_0.

Si l'on observe maintenant que tous les coefficients M_i sont positifs, on établira, comme ci-dessus (n° **15**), que le nombre des racines de l'équation (2) qui sont supérieures à α'_0 est au plus égal au nombre des racines de l'équation

$$a_0 x^{\log \alpha'_0} + a_1 x^{\log \alpha'_1} + \ldots + a_n x^{\log \alpha'_n} = 0,$$

qui sont supérieures à l'unité; ce nombre est donc au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

D'ailleurs le nombre des racines de l'équation (2) qui sont supé-

rieures à α'_0, c'est-à-dire à $\alpha_0 + k$, est précisément égal au nombre des racines de l'équation (1) qui sont supérieures à α_0. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant rangées par ordre décroissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation

$$\frac{a_0}{(x-\alpha_0)^\omega} + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)^\omega} + \ldots + \frac{a_n}{(x-\alpha_n)^\omega} = 0$$

qui sont supérieures à α_0 est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

Le nombre des alternances est pair ou impair, suivant que les deux quantités a_0 et $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ sont de même signe ou de signe contraire; il en est de même du nombre des racines de l'équation supérieures à α_0, comme on le voit en substituant successivement dans le premier membre de l'équation $+\infty$ et la quantité $\alpha_0 + \varepsilon$, où ε désigne une quantité infiniment petite. Ceci ne s'applique pas au cas où l'on aurait $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$; ce cas écarté, on peut dire que :

Si le nombre des racines de l'équation supérieure à α_0 et le nombre des alternances de la suite formée par les coefficients diffèrent, leur différence est un nombre pair.

28. Laissant de côté, pour l'instant, le cas général, je m'occuperai en particulier de l'équation

$$(1) \qquad \frac{a_0}{x-\alpha_0} + \frac{a_1}{x-\alpha_1} + \frac{a_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{a_n}{x-\alpha_n} = 0.$$

Dans l'intervalle compris entre α_i et α_{i+1}, intercalons deux nombres ξ et ξ', de telle sorte que les nombres

$$(\lambda) \qquad \alpha_0, \ \ldots, \ \alpha_i, \ \xi, \ \xi', \ \alpha_{i+1}, \ \ldots, \ \alpha_n$$

soient rangés par ordre croissant ou décroissant de grandeur, et faisons la substitution

$$x = \frac{\lambda\xi - \xi'}{\lambda - 1},$$

d'où l'on déduit

$$X = \frac{x - \xi'}{x - \xi}.$$

Aux quantités du Tableau (A) correspondent les quantités suivantes :

$$\alpha'_0,\ \ldots,\ \alpha'_i,\ \infty,\ 0,\ \alpha'_{i+1},\ \alpha'_n,$$

qui seront rangées par succession de grandeur [1].

On voit aisément que toutes les quantités α'_k sont positives : α_i est donc la plus grande d'entre elles; l'équation (1) devient, en effectuant la substitution indiquée ci-dessus,

$$\sum \frac{a_k}{\dfrac{X\xi - \xi'}{X - 1} - \alpha_k} = 0$$

ou encore

$$\sum \frac{a_k}{X(\xi - \alpha_k) - (\xi' - \alpha_k)} = \sum \frac{a_k}{\xi - \alpha_k}\,\frac{1}{X - \alpha'_k}.$$

---

[1] Il est bon de préciser ce que j'entends par là. Des quantités sont dites rangées par succession croissante ou décroissante de grandeur si une quantité variable, qui varie toujours dans le même sens, prend successivement les valeurs des termes de la suite de ces quantités, en passant par l'infini, si cela est nécessaire.

Ainsi les quantités

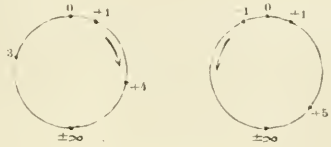
$$+4,\ -3,\ 0,\ +1$$

sont rangées par succession croissante de grandeur, et les quantités

$$1,\ 0,\ -1,\ +5$$

par succession décroissante de grandeur.

Au lieu de ranger les quantités sur une ligne droite, on peut les ranger sur un cycle de la façon suivante :



Or, α_i étant le plus grand des nombres α_k qui sont tous positifs, en appliquant la proposition démontrée précédemment, on voit que le nombre des racines de l'équation

$$(2) \qquad \sum \frac{a_k}{\xi - \alpha_k} \frac{1}{X - \alpha'_k} = 0$$

qui sont supérieures à α'_k, c'est-à-dire le nombre des racines de l'équation (1) qui sont comprises dans l'intervalle (ξ, α_i) [1], est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{a_i}{\xi - \alpha_i} + \frac{a_{i-1}}{\xi - \alpha_{i-1}} + \frac{a_{i-2}}{\xi - \alpha_{i-2}} + \ldots + \frac{a_{i+2}}{\xi - \alpha_{i+2}} + \frac{a_{i+1}}{\xi - \alpha_{i+1}}.$$

29. Comme application, considérons l'équation

$$(1) \qquad \frac{14}{x-2} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{14}{x-2} = 0.$$

Les quantités

$$-2, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad +2$$

étant rangées par succession de grandeur, nous aurons à considérer les cinq intervalles

$$(-2, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, +1), \quad (+1, +2), \quad (+2, -2),$$

dont le dernier renferme l'infini.

En désignant par ξ une quantité réelle quelconque, nous déduisons, de ce qui précède, les conséquences suivantes :

1° ξ étant dans l'intervalle $(-2, -1)$, le nombre des racines de

---

[1] Des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \tau, \omega$ étant rangées par succession de grandeur, j'appelle intervalle (λ, μ) celui des intervalles déterminés par ces deux nombres qui ne renferme aucun des autres nombres. Cet intervalle peut renfermer l'infini si λ et μ sont de signe contraire; ainsi, étant donnée la suite

$$+4, \quad -3, \quad 0, \quad +1,$$

l'intervalle $(+4, -3)$ renferme l'infini.

l'équation (1) qui sont comprises entre ξ et -2 est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi+2} + \frac{14}{\xi-2} - \frac{1}{\xi-1} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi+1},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et -1, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi+1} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi-1} + \frac{14}{\xi-2} + \frac{14}{\xi+2}.$$

En particulier, faisons, dans la première suite, $\xi = -1 - \varepsilon$, ε désignant une quantité infiniment petite positive ; la suite devient

$$14 - \frac{14}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \infty ;$$

comme elle ne présente pas d'alternance, on en conclut que l'équation (1) n'a pas de racine dans l'intervalle $(-2, -1)$.

2° ξ étant dans l'intervalle $(-1, 0)$, le nombre des racines de l'équation qui sont comprises entre ξ et -1 est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi+1} + \frac{14}{\xi+2} + \frac{14}{\xi-2} - \frac{1}{\xi-1} + \frac{2}{\xi},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et 0 au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$(2) \qquad \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi-1} + \frac{14}{\xi-2} + \frac{14}{\xi+2} - \frac{1}{\xi+1}.$$

Faisons, en particulier, dans la première suite, $x = -\varepsilon$; la suite devient

$$-1 + 7 - 7 + 1 - \infty ;$$

comme elle présente deux alternances, on voit que l'intervalle $(-1, 0)$ comprend deux racines ou n'en comprend pas.

3° ξ étant dans l'intervalle $(0, +1)$, le nombre des racines de l'équation qui sont comprises entre 0 et ξ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$(3)\qquad \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{14}{\xi+2} + \frac{14}{\xi-2} - \frac{1}{\xi-1},$$

et celui des racines qui sont comprises entre ξ et $+1$, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi-1} + \frac{14}{\xi-2} + \frac{14}{\xi+2} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{2}{\xi}.$$

Faisons, par exemple, $\xi = 1 - \varepsilon$, la première suite devient

$$2 - \frac{1}{2} + \frac{14}{3} - 14 + \infty;$$

elle présente deux alternances : donc l'équation a dans l'intervalle $(0, +1)$ un nombre de racines égal à 0 ou à 2.

On arrive à la même conclusion en substituant dans la seconde suite $+\varepsilon$; elle devient, en effet,

$$+1 - 7 + 7 - 1 + \infty,$$

et cette suite présente également deux alternances.

4° ξ étant dans l'intervalle $(+1, +2)$, le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et $+1$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$-\frac{1}{\xi-1} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{14}{\xi+2} + \frac{14}{\xi-2},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et $+2$, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi-2} + \frac{14}{\xi+2} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi-1}.$$

Faisons, par exemple, dans la deuxième suite $\xi = 1 + \varepsilon$, elle de-

vient

$$-14 + \frac{14}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \infty ;$$

comme elle ne représente aucune alternance, l'équation n'a aucune racine dans l'intervalle considéré.

5° Considérons enfin l'intervalle $(+2, -2)$ qui contient l'infini; ξ étant dans cet intervalle, le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et $+2$ est au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi - 2} - \frac{1}{\xi - 1} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi + 1} + \frac{14}{\xi + 2},$$

et le nombre des racines qui sont comprises entre ξ et -2, au plus égal au nombre des alternances de la suite

$$\frac{14}{\xi + 2} - \frac{1}{\xi + 1} + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi - 1} + \frac{14}{\xi - 2}.$$

Faisons, par exemple, dans la deuxième suite, $\xi = 2 + \varepsilon$, elle devient

$$\frac{7}{2} - \frac{1}{3} + 1 - 1 + \infty ;$$

et, comme elle ne présente aucune alternance, l'équation proposée n'a aucune racine dans l'intervalle $(+2, -2)$.

30. L'équation précédente ne peut donc avoir de racines que dans les intervalles $(-1, 0)$ et $(0, +1)$.

Faisons $\xi = -\frac{3}{4}$ dans la suite (2), elle devient

$$-\frac{8}{3} + \frac{4}{7} - \frac{14 \cdot 4}{11} + \frac{14 \cdot 4}{5} - 4,$$

et présente une alternance; l'équation a donc une racine et une seule comprise entre 0 et $-\frac{3}{4}$ et, par suite, une et une seule comprise entre $-\frac{3}{4}$ et -1.

En second lieu, faisons, dans la suite (3), $\xi = \frac{3}{4}$, elle devient

$$\frac{8}{3} - \frac{4}{7} + \frac{14 \cdot 4}{11} - \frac{14 \cdot 4}{5} + 4;$$

et comme elle ne présente qu'une alternance, il en résulte que l'intervalle $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ comprend une seule racine et il en est de même, par suite, de l'intervalle $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$.

On voit ainsi que l'équation proposée a toutes ses racines réelles; la première est comprise entre -1 et $-\frac{3}{4}$, la deuxième entre $-\frac{3}{4}$ et 0, la troisième entre zéro et $+\frac{3}{4}$, et la quatrième entre $+\frac{3}{4}$ et $+1$.

C'est ce qu'il est, du reste, aisé de vérifier, l'équation mise sous forme entière étant

$$(2x^2 - 1)(7x^2 - 4) = 0.$$

Étude sur les lois de la résistance de l'air;

PAR M. E. VALLIÉR,
Capitaine d'Artillerie.

La question de la résistance de l'air au mouvement des corps qui y sont plongés n'a guère été étudiée jusqu'ici que d'après des résultats d'expérience, et l'on n'a encore énoncé, à la suite de ces essais, que des lois empiriques ne découlant d'aucun principe théorique. Cependant, M. Athanase Dupré, dans sa *Théorie mécanique de la chaleur*, a essayé de rattacher cette question aux lois de l'écoulement des gaz.

Toutefois, ses expériences n'ont pu être réalisées qu'avec de faibles vitesses, de telle sorte que la question peut être considérée comme entière. Je me propose dans le présent travail, après avoir exposé, aussi brièvement que possible, l'état actuel du problème, d'en entreprendre une étude théorique, et, si les résultats qui en seront déduits concordent avec ceux de l'expérience, ils constitueront par cela même une démonstration expérimentale de la loi théorique énoncée.

Laissant de côté la question des faibles vitesses, sur laquelle divers essais ont été faits, essais qui ont conduit à admettre la résistance comme proportionnelle au carré de la vitesse et à l'emploi de formules correspondantes, modifiées par des coefficients de correction, je ne m'occuperai dans cette étude que des grandes vitesses, de 200^{m} à 500^{m}, qui ne sont réalisées que dans le tir des projectiles de l'Artillerie.

Cette étude du mouvement des projectiles dans l'air, dite *Balistique extérieure*, est d'une très grande complication, puisqu'il y a lieu de tenir compte de la forme du mobile et en outre, actuellement, du mouve-

ment de rotation dont il est animé. La dérivation, conséquence du mouvement de rotation ci-dessus énoncé, est l'objet d'une étude spéciale dans les Ouvrages de Balistique; mais l'expérience a montré qu'elle ne modifiait pas sensiblement la loi de la projection verticale du mouvement et que, par suite, on pouvait la négliger dans l'examen de cette loi.

Les essais ont été faits jusqu'à présent de la manière suivante: On a mesuré, par des procédés variables, la vitesse du projectile en deux points de sa trajectoire, assez rapprochés pour que la perte de vitesse pût être attribuée uniquement à la résistance de l'air, abstraction faite de la pesanteur, et que cette résistance elle-même pût être considérée comme constante, et l'on a déduit de cette perte de vitesse la valeur de la résistance correspondant à la vitesse moyenne observée. C'est ainsi que l'on a été conduit à admettre aujourd'hui, comme représentant les résultats de l'expérience, que :

La résistance de l'air par unité de surface est proportionnelle au cube de la vitesse, pour les projectiles sphériques, et à la quatrième puissance pour les projectiles oblongs. Elle est dirigée suivant la tangente à la trajectoire.

Toutefois, un géomètre anglais, M. Bashforth, la représente dans tous les cas par la formule cubique

$$R = cv^3;$$

mais, dans cette expression, le paramètre c prend diverses valeurs selon la vitesse et ne peut être considéré comme constant, pour la facilité du calcul, qu'entre certaines limites. M. le général Mayewski, de l'Artillerie russe, admet diverses formules, monômes ou binômes, à exposants entiers, selon la valeur de la vitesse.

Quelle que soit la formule adoptée, les auteurs ont toujours étudié le problème analytiquement en considérant le projectile comme un point matériel et établissant, d'après cela, diverses équations (trajectoire, tangente, etc.) dont ils déterminaient ensuite les paramètres, d'après les données de l'expérience. La position actuelle de la question est donc la suivante :

Représentation de la résistance de l'air par des expressions empiriques;

Lois du mouvement du projectile, considéré comme point matériel, déduites analytiquement des expressions ci-dessus mentionnées, et mises d'accord avec la réalité par une détermination convenable des paramètres.

Cherchons maintenant, comme l'ont proposé Athanase Dupré et, après lui, M. le colonel Sébert, de l'Artillerie de la Marine, à appliquer au problème qui nous occupe les lois de l'écoulement des gaz.

Si l'on suppose que, le projectile étant en mouvement, on lui imprime, ainsi qu'à l'air ambiant, une vitesse égale et contraire à celle dont il est animé, rien ne sera changé au mouvement relatif : le projectile restera immobile, et l'air s'écoulera le long de ses parois d'après les règles ordinaires.

Or ces lois de l'écoulement des gaz ont fait connaître que la vitesse dépend des pressions, et, par suite, on peut remonter de cette vitesse aux pressions sur les parois du projectile, et de là à la résistance.

Il existe trois formules relatives à cette loi d'écoulement : la première suppose que la densité du gaz reste constante dans toute l'étendue du filet considéré, ce qui suppose implicitement que les pressions extrêmes sont égales, à moins de changements notables de température : elle n'est donc évidemment applicable que dans le cas de faibles vitesses, qui n'est pas celui qui nous occupe.

La deuxième, dite formule de Navier, suppose que la température du gaz ne change pas (transformation isotherme).

La troisième, formule de Zenner, suppose, au contraire, que les éléments gazeux se déplacent sans recevoir ni dégager de chaleur (transformation adiabatique) et qu'il y a donc, par suite du travail intérieur qui s'opère entre les molécules, un changement de température. Il n'entre pas dans le cadre de cette étude d'examiner les considérations théoriques qui peuvent amener à faire un choix entre ces deux formules : il semble d'ailleurs que ni l'une ni l'autre ne soit absolument l'expression du phénomène qui nous occupe et que la transformation ne doive être exactement ni isotherme, car il est probable que le projectile et par suite les gaz s'échauffent, ni adiabatique, puisque, pour échauffer le projectile, le gaz doit dépenser une partie de son énergie.

Entre ces deux lois, qui présentent sans doute, l'une et l'autre, une

image approchée du phénomène, j'ai été conduit à adopter la loi de Navier comme l'avait fait Athanase Dupré; mais la raison principale est simplement que cette formule se prête aux recherches analytiques, ce qui n'est pas le cas de celle de Zeuner qui conduit, dès la première intégration, à des expressions trop compliquées.

Le présent travail a donc pour but l'application de la loi de Navier à l'étude des problèmes balistiques.

BALISTIQUE D'UN POINT MATÉRIEL.

Formule de Navier. — Considérons un filet gazeux en mouvement; soient

u_1 et u_2 les vitesses d'écoulement en deux points;
p_1 et p_2 les pressions correspondantes;
T la température absolue au moment de l'expérience (température qui est celle du filet);
p_0 la pression atmosphérique normale;
δ le poids spécifique de l'air à 0° et à la pression p_0.

La formule de Navier est

$$u_2^2 - u_1^2 = \frac{2gp_0}{\delta}\,\frac{T}{273}\,L\,\frac{p_1}{p_2}$$

ou, en posant

$$\frac{\delta}{2gp_0}\,\frac{273}{T} = b$$

et résolvant par rapport à p_1,

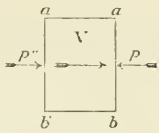
$$p_1 = p_2 e^{b(u_2^2 - u_1^2)}.$$

Soit maintenant un disque élémentaire $aba'b'$ (*fig.* 1), animé d'une vitesse V au sein d'une atmosphère à la pression p_0.

Ce disque supporte à sa partie antérieure une pression p', à sa partie postérieure une pression p''. Pour évaluer ces pressions, Athanase Dupré remarque que, lorsque le régime régulier est établi, il doit y

avoir équilibre entre la pression p' de la couronne gazeuse placée à l'avant du disque et celle qui, d'après sa formule, correspond à l'ac-

Fig. 1.



tion d'un gaz à la pression p_0, et animé d'une vitesse V égale et contraire à celle du disque : faisant donc, dans la formule,

$$u_1 = V, \quad p_1 = p_0, \quad u_2 = 0,$$

on en déduit

$$p_2 = p_0 e^{bV^2}$$

et, comme $p' = p_2$,

$$p' = p_0 e^{bV^2}.$$

On aurait de même, par un raisonnement semblable, pour la pression arrière,

$$p'' = p_0 e^{-bV^2},$$

et par suite, en désignant par S l'aire du disque élémentaire et par R la résistance, il viendra

$$R = p_0 S (e^{bV^2} - e^{-bV^2}) = S(p' - p'').$$

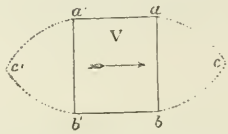
Ce raisonnement, comme le reconnaît Dupré, n'est pas à l'abri de toute objection : il ne doit être considéré que comme donnant une première approximation du phénomène.

On peut encore présenter le calcul comme il suit :

Considérons le disque $aa'bb'$, animé de la vitesse V, dans le sens de la flèche, et imprimons-lui, ainsi qu'à l'atmosphère ambiante, une vitesse égale et de signe contraire, de telle sorte que rien n'est changé au mouvement relatif. L'air s'écoulera sans difficulté le long des parois aa' et bb', et conservera sa pression p_0. Quant à la colonne gazeuse qui se présente en ab, elle se comprimera d'abord en avant, jusqu'à ce que

le régime définitif soit établi, puis le gaz continuera à s'écouler le long d'un certain contour ca et cb; à ce moment, il y a équilibre entre l'action du courant gazeux à la pression p_0, tendant à pénétrer dans acb

Fig. 2.



en vertu de sa vitesse V, et celle du gaz immobile en acb à la pression moyenne p', et en faisant, comme plus haut, dans la formule de Navier,

$$u_2 = 0, \quad u_1 = V, \quad p_1 = p_0,$$

on aura

$$p' = p_2 = p_0 e^{bV^2}.$$

Il s'établira en arrière un équilibre analogue entre l'action du courant gazeux à la pression p_0 et à la vitesse V, et celle du gaz immobile en $a'c'b'$ à la pression p'', et par suite, en faisant

$$u_2 = 0, \quad u_1 = V, \quad p_2 = p_0,$$

on aura

$$p'' = p_0 e^{-bV^2}.$$

Sous cette forme, on voit que le raisonnement laisse de côté, ou plutôt préjuge l'état du courant gazeux le long des contours ca et $a'c'$. Nous admettrons cependant ces résultats en première approximation, nous réservant d'y revenir ultérieurement.

Reprenant la valeur

$$R = p_0 S \left(e^{bV^2} - e^{-bV^2}\right),$$

désignant par m la masse du projectile et posant

$$c = \frac{p_0 S}{m},$$

il viendra

$$c\left(e^{bV^2} - e^{-bV^2}\right),$$

pour valeur de l'accélération correspondant à la force retardatrice de l'atmosphère, et c'est cette expression que nous allons introduire dans nos calculs.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL DANS UN MILIEU HOMOGÈNE ET DE TEMPÉRATURE CONSTANTE.

Dans un tel milieu, le coefficient b est constant, ainsi que v_0 et, par suite, que c : il n'y a donc de variable que la vitesse.

Mouvement rectiligne horizontal. — Désignons par

x l'espace parcouru;
u la vitesse;
t le temps.

On aura

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{R} = -mc(e^{bu^2} - e^{-bu^2})$$

ou

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -c(e^{bu^2} - e^{-bu^2})$$

et d'autre part, par définition,

$$(2)\qquad \frac{dx}{dt} = u.$$

On déduit aisément des équations (1) et (2) le système

$$(3)\qquad c\,dt = -\frac{du}{e^{bu^2} - e^{-bu^2}}$$

et

$$(4)\qquad c\,dx = -\frac{u\,du}{e^{bu^2} - e^{-bu^2}}.$$

Calcul de x. — En posant, pour simplifier l'écriture,

$$e^{bu^2} = z,$$

on met l'équation (4) sous la forme

$$c\,dx = -\frac{1}{2b}\frac{dz}{z^2-1},$$

et, en intégrant de 0 à x, désignant par u_0 la vitesse initiale et par z_0 l'expression $e^{bu_0^2}$, il vient

$$(5)\qquad x = -\frac{1}{4bc}\,\mathrm{L}\,\frac{z-1}{z+1}\,\frac{z_0+1}{z_0-1}.$$

On peut résoudre l'équation (5) par rapport à z, ce qui donne

$$(6)\qquad z = \frac{\dfrac{1+z_0}{z_0-1}\,e^{4bcx}-1}{\dfrac{1+z_0}{z_0-1}\,e^{4bcx}-1},$$

et, par suite, on a la vitesse en chaque point, puisque $z = e^{bu^2}$.

Calcul de t. — La valeur de dt peut s'écrire

$$(3\,bis)\qquad c\,dt = \frac{-e^{-bu^2}du}{1-e^{-2bu^2}}$$

ou

$$-c\,dt = e^{-bu^2}(1 + e^{-2bu^2} + e^{-4bu^2} + \ldots + e^{-2nbu^2} + \ldots)\,du,$$

que nous écrirons

$$-c\,dt = \sum_{n=0}^{n=+\infty} e^{-(2n+1)bu^2}du,$$

pour toutes les valeurs entières de n.

Considérons le terme général, pris entre les limites u_0 et u.

$$\int_{u_0}^{u} e^{-(2n+1)bu^2}du,$$

et cherchons à en calculer la valeur.

Si l'on pose

$$(2n+1)bu^2 = y^2,$$

$$y = u\sqrt{(2n+1)b},$$

on aura

$$\int_{u_0}^{u} e^{-(2n+1)bu^2} du = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)b}} \int_{\gamma_0}^{\gamma} e^{-\gamma^2} d\gamma.$$

Il a été construit des Tables de la fonction

$$\Pi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\gamma^2} d\gamma,$$

et il vient, par suite, pour le terme général,

$$\int_{u_0}^{u} e^{-(2n+1)bu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} [\Pi(\gamma) - \Pi(\gamma_0)].$$

L'expression de t devient donc, en substituant à γ sa valeur et changeant les signes des deux membres,

$$ct = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left[\Pi\left(u_0\sqrt{b}\sqrt{2n+1}\right) - \Pi\left(u\sqrt{b}\sqrt{2n+1}\right)\right],$$

et l'on peut ainsi, à l'aide des Tables de la fonction Π, calculer les durées en fonction de u.

On connaît donc tous les éléments de la question, qui n'a d'ailleurs qu'un intérêt théorique.

Mouvement rectiligne vertical. — Envisageons maintenant le cas du mouvement d'un projectile lancé verticalement et soumis aux lois de la pesanteur.

En désignant par v la vitesse, on aura les équations différentielles

$$\frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -c(e^{bv^2} - e^{-bv^2}) - g;$$

d'où

$$dy = -c\frac{v\,dv}{c(e^{bv^2} - e^{-bv^2}) + g}.$$

En suivant la même marche que dans l'étude du mouvement

horizontal et posant

$$e^{bv^2} = w,$$

on aura

$$2b\,dy = -\frac{dw}{cw^2 + gw - c}.$$

Désignant par r_1 et r_2 les racines du dénominateur égalé à zéro, on écrira

$$-2bc\,dy\frac{1}{r_1 - r_2}\left(\frac{1}{w - r_1} - \frac{1}{w - r_2}\right)dw$$

et, en intégrant de o à y et posant $w_0 = e^{bv_0^2}$,

$$-2bcy = \frac{1}{r_1 - r_2}\,\mathrm{L}\frac{w - r_1}{w - r_2}\,\frac{w_0 - r_2}{w_0 - r_1}.$$

Soit r_1 la racine positive de l'équation; substituant à r_2 sa valeur $-\frac{1}{r_1}$ et supprimant l'indice après la substitution, il viendra

$$-2bcy = \frac{r}{1 + r^2}\,\mathrm{L}\frac{w - r}{1 + rw}\,\frac{1 + rw_0}{w_0 - r},$$

ou enfin

$$(2)\qquad 2bc\frac{1 + r^2}{r}\,y = \mathrm{L}\frac{1 + rw}{w - r}\,\frac{w_0 - r}{1 + rw_0}.$$

Hauteur maxima. — Le projectile s'arrête lorsque l'on a $v = 0$ ou $w = 1$, ce qui donne

$$2bc\frac{1 + r^2}{r}\,\mathrm{Y} = \mathrm{L}\frac{1 + r}{1 - r}\,\frac{w_0 - r}{1 + rw_0}.$$

Mouvement descendant. — A partir de ce moment, le projectile se met à redescendre, mais c change de signe, puisque la résistance de l'air ralentit le mouvement de chute : et, en désignant par r' une quelconque des racines de l'équation

$$cw^2 - gw - c = 0,$$

on aura, par le même calcul que plus haut et intégrant depuis Y jusqu'à y,

$$2bc\,(y - \mathrm{Y})\frac{1 + r'^2}{r'} = \mathrm{L}\frac{1 - r'}{1 + r'}\,\frac{r'w - 1}{w - r'}.$$

L'équation en r' a les mêmes racines, changées de signe, que l'équation en r : on peut donc prendre $r' = -r$, et il vient alors, en substituant à Y sa valeur,

$$2bc\frac{1+r^2}{r}y = \mathrm{L}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 \frac{1-rw}{w+r}\,\frac{1+rw_0}{w_0-r}.$$

Vitesse à l'origine. — En faisant $y = 0$, il vient

$$w = \frac{w_0(1+2r-r^2)-2r}{1-2r-r^2+2rw_0}.$$

Vitesse limite. — En se reportant à l'équation différentielle du mouvement descendant

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c(e^{bv^2} - e^{-bv^2}) - g = \frac{cw^2 - gw - c}{w},$$

où w par définition est positif et au moins égal à 1, on voit que l'accélération est négative tant que w est compris entre les racines, c'est-à-dire que le mouvement descendant s'accélère jusqu'à ce que l'on ait

$$w = \frac{1}{r}.$$

A ce moment l'accélération devient nulle et la vitesse est donnée par l'équation

$$bv^2 = \mathrm{L}\frac{1}{r} = \mathrm{L}\frac{\sqrt{g^2+4c^2}-g}{2c}.$$

En se reportant d'ailleurs à l'équation de la branche descendante, on voit que, pour une valeur de w supérieure à $\frac{1}{r}$, la quantité sous le signe L devient négative et, par suite, y imaginaire. Pour $w = \frac{1}{r}$, on a

$$y = -\infty.$$

Ainsi la vitesse limite n'est atteinte qu'à $-\infty$.

Passons maintenant au problème général.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL, LANCÉ OBLIQUEMENT ET SOUMIS A L'ACTION DE LA PESANTEUR.

En désignant par

x, y les coordonnées d'un point de la trajectoire;
θ l'angle d'inclinaison;
V la vitesse,

les équations différentielles du mouvement sont

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -c(e^{bV^2} - e^{-bV^2})\cos\theta,$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -c(e^{bV^2} - e^{-bV^2})\sin\theta - g,$$

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\theta;$$

en posant, pour simplifier l'écriture, $p = \operatorname{tang}\theta$, on déduit de ce système

$$(2\,bis) \qquad dp\,dx = -g\,dt^2,$$

qui remplace l'équation (2).

On ne peut, dans un tel système, arriver à la séparation des variables, et force est d'opérer par approximation. Cette difficulté se présente dans toutes les équations de Balistique, à moins qu'on ne suppose la résistance proportionnelle à la première puissance de la vitesse. On emploie alors l'artifice suivant, auquel je vais également recourir.

Soit, d'une manière générale, $f(v)$ l'expression de l'accélération due à la résistance, de telle sorte que l'équation du mouvement projeté sur l'axe des x soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f(v)\cos\theta$$

ou, en désignant par u la vitesse horizontale,

$$\frac{du}{dt} = -f\left(\frac{u}{\cos\theta}\right)\cos\theta$$

ou, comme $u = \frac{dx}{dt}$,

$$\frac{u\,du}{dx} = -f\left(\frac{u}{\cos\theta}\right)\cos\theta,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{u\,du}{dx} = -f\left(\frac{\alpha u}{\alpha\cos\theta}\right)\frac{\alpha\cos\theta}{\alpha}.$$

Si l'on admet maintenant que, entre les limites que l'on considère, on puisse donner au paramètre α une valeur constante, telle que le produit $\alpha\cos\theta$ s'écarte peu de l'unité, l'équation différentielle se réduira, par approximation, à

$$\alpha\frac{u\,du}{dx} = -f(\alpha u),$$

où les variables sont séparées.

Dans le cas de tirs sous de petits angles, on se contentera de prendre une seule valeur pour α : pour le tir sous de grands angles, on subdivisera la trajectoire en plusieurs arcs, à chacun desquels on affectera une valeur convenable de α.

D'après cette méthode, l'équation (1) sera remplacée par l'équation approchée

$$(1\ bis)\qquad \alpha\frac{u\,du}{dx} = -c\left(e^{b\alpha^2u^2} - e^{-b\alpha^2u^2}\right)$$

ou

$$\frac{\alpha u\,d(\alpha u)}{dx} = -c\alpha\left(e^{b\alpha^2u^2} - e^{-b\alpha^2u^2}\right).$$

Cette équation n'est autre que celle que nous avons rencontrée dans l'étude du mouvement horizontal, en y remplaçant u par αu; la même analyse conduira donc à l'équation

$$(4)\qquad x = -\frac{1}{4bc\alpha}\,\mathrm{L}\,\frac{z-1}{z+1}\,\frac{z_0+1}{z_0-1},$$

en posant

$$z = e^{b\alpha^2u^2},\quad z_0 = e^{b\alpha^2u_0^2}.$$

Désignons

$$4bc\alpha \text{ par } m, \quad \frac{z_0+1}{z_0-1} \text{ par } n, \quad \frac{z_0-1}{z_0+1} \text{ par } n' = \frac{1}{n},$$

il vient, en résolvant (4) par rapport à z,

$$z = \frac{1+n'e^{-mx}}{1-n'e^{-mx}}$$

ou

$$(5) \qquad b\alpha^2 u^2 = \mathrm{L}\frac{1+n'e^{-mx}}{1-n'e^{-mx}},$$

on remarquera que le produit $n'e^{-mx}$ est moindre que l'unité.

Cette équation (5) donne la vitesse horizontale en chaque point de la trajectoire ou de l'arc de trajectoire considéré.

Équation de la trajectoire. — L'équation (2 *bis*)

$$dp\,dx = -g\,dt^2$$

peut s'écrire

$$\frac{dp}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -g$$

ou

$$u^2\frac{dp}{dx} = -g,$$

et, en substituant à u sa valeur tirée de (5) et séparant les variables, il vient

$$dp = -gb\alpha^2 \frac{1}{\mathrm{L}\frac{1+n'e^{-mx}}{1-n'e^{-mx}}}\,dx.$$

Développant le dénominateur par rapport aux puissances de $n'e^{-mx}$, il vient

$$dp = -\frac{gb\alpha^2}{2}\,\frac{1}{n'e^{-mx} - \frac{n'^3}{3}e^{-3mx} + \ldots}\,dx$$

ou

$$dp = -\frac{gbn\alpha^2}{2}\,e^{mx}\,\frac{1}{1+\frac{n'^2}{3}e^{-2mx}+\ldots}\,dx$$

et, en effectuant la division,

$$dp = -\frac{gbn\alpha^2}{2} e^{mx}\left(1 - \frac{n'^2}{3} e^{-2mx} - \frac{7n'^4}{45} e^{-4mx}\right) dx$$

ou

$$dp = -\frac{gbn\alpha^2}{2}\left(e^{mx} - \frac{n'^2}{3} e^{-mx} - \frac{7n'^4}{45} e^{-3mx}\right) dx,$$

et, en intégrant de zéro à x,

$$(6) \qquad p - p_0 = -\frac{gbn\alpha^2}{2}\left(\frac{e^{mx}-1}{m} + \frac{n'^2}{3}\,\frac{e^{-mx}-1}{m} + \frac{7n'^4}{45}\,\frac{e^{-3mx}-1}{3m}\right),$$

qui donne l'inclinaison de la tangente en chaque point.

L'équation (3), $p = \frac{dy}{dx}$, substituée dans l'équation (6), donne

$$dy - p_0\,dx = -\frac{gbn\alpha^2}{2}\left(\frac{e^{mx}-1}{m} + \frac{n'^2}{3}\,\frac{e^{-mx}-1}{m} + \frac{7n'^4}{45}\,\frac{e^{-3mx}-1}{3m} + \cdots\right) dx,$$

et, en intégrant de zéro à x,

$$(7) \qquad y - p_0 x = -\frac{gbn\alpha^2}{2}\left(\frac{e^{mx} - mx - 1}{m^2} - \frac{n'^2}{3}\,\frac{e^{-mx} + mx - 1}{m^2} - \frac{7n'^4}{45}\,\frac{e^{-3mx} + 3mx - 1}{9m^2} + \cdots\right),$$

ce qui est l'équation de la courbe cherchée.

Les équations (6) et (7) peuvent se mettre sous une autre forme. Les expressions

$$\frac{e^{mx}-1}{m}, \quad \frac{e^{-mx}-1}{m}, \quad \ldots$$

contiennent x en facteur;

$$\frac{e^{mx} - mx - 1}{m^2}, \quad \frac{e^{-mx} + mx - 1}{m^2}, \quad \ldots$$

contiennent x^2 en facteur, ce qui conduit à poser

$$\frac{e^{mx}-1}{m} = x\,F_1(mx),$$

et

$$\frac{e^{mx} - mx - 1}{m^2} = x^2 \frac{F(mx)}{2}.$$

Il a été construit des Tables des fonctions F et F_1, qui se rencontrent en Balistique lorsque l'on prend la résistance proportionnelle au carré de la vitesse (ces Tables se trouvent dans les Ouvrages de MM. Didion et Mayewski), et les équations (6) et (7) se mettent alors sous la forme

$$p = p_0 - \frac{gbn\alpha^2}{2} x \left[F_1(mx) - \frac{n'^2}{3} F_1(-mx) + \ldots \right],$$

$$y = p_0 x - \frac{gbn\alpha^2}{4} x^2 \left[F(mx) - \frac{n'^2}{3} F(-mx) \right],$$

en se bornant aux deux premiers termes.

Quant aux durées de trajet, on les déduira de l'analyse faite pour le cas du mouvement horizontal, et l'on aura

$$ct = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left[\Pi(\alpha u_0 \sqrt{b} \sqrt{2n+1}) - \Pi(\alpha u \sqrt{b} \sqrt{2n+1}) \right].$$

Discussion du coefficient n. — Le coefficient n a pour valeur

$$\frac{z_0 + 1}{z_0 - 1} = \frac{e^{b\alpha^2 u_0^2} + 1}{e^{b\alpha^2 u_0^2} - 1},$$

et, si l'on remarque que le dénominateur contient $b\alpha^2 u_0^2$ en facteur, on est conduit à écrire

$$n = \frac{1}{b\alpha^2 u_0^2} \frac{e^{b\alpha^2 u_0^2} + 1}{\frac{e^{b\alpha^2 u_0^2} - 1}{b\alpha^2 u_0^2}} = \frac{1}{b\alpha^2 u_0^2} \frac{2 + b\alpha^2 u_0^2 + \frac{b^2\alpha^4 u_0^4}{1.2} + \ldots}{1 + \frac{b\alpha^2 u_0^2}{1.2} + \ldots}$$

ou

$$n = \frac{2}{b\alpha^2 u_0^2} \frac{1 + \frac{b\alpha^2 u_0^2}{2} + \frac{b^2\alpha^4 u_0^4}{1.2.3} + \ldots}{1 + \frac{b\alpha^2 u_0^2}{1.2} + \frac{b^2\alpha^4 u_0^4}{1.2.3} + \ldots},$$

et, en effectuant la division,

$$n = \frac{2}{b\alpha^2 u_0^2} \left(1 + \frac{b^2\alpha^4 u_0^4}{12} + \ldots \right).$$

On prendra donc

$$n = \frac{2}{b\alpha^2 u_0^2}\left(1 + \frac{b^2\alpha^2 u_0^2}{12}\right),$$

avec une approximation d'autant plus satisfaisante que le développement ne comprend pas de termes en b^3, comme on le vérifiera aisément

Il vient alors dans les deux équations de la tangente et de la courbe

$$p = p_0 - \frac{g}{2u_0^2}\left(1 + \frac{b^2\alpha^2 u_0^2}{12}\right)x\left[F_1(mx) - \frac{n^2}{3}F_1(-mx)\right]$$

et

$$y = p_0 x - \frac{g}{2u_0^2}\left(1 + \frac{b^2\alpha^2 u_0^2}{12}\right)x^2\left[F(mx) - \frac{n^2}{3}F(-mx)\right].$$

Il reste à déterminer le coefficient α. On se rappelle que ce coefficient doit avoir une valeur intermédiaire entre les valeurs extrêmes de $\frac{1}{\cos\theta}$ pour toute l'étendue de l'arc considéré. Pour un arc donné de trajectoire, où θ varierait par exemple entre 20° et 30°, on déterminerait α à l'aide de Tables construites à cet effet et qui se trouvent dans les *Traités de Balistique*. Mais, si l'on peut représenter toute la trajectoire par un seul arc, ce qui exige que θ varie un peu, c'est-à-dire que l'angle de projection soit faible (on admet qu'il ne doit pas dépasser 10°), on peut chercher à donner à α une valeur en fonction des éléments connus sans recourir à la Table spéciale. Dans ce cas, l'angle θ varie depuis φ, angle de projection, jusqu'à 0° dans la branche ascendante, et depuis 0° jusqu'à une valeur un peu supérieure à φ dans la branche descendante : la valeur de α doit donc être comprise entre $\frac{1}{\cos\varphi}$ et 1.

L'examen de l'équation différentielle (1 *bis*), comme celui des équations de la courbe et de la tangente, montre qu'en donnant à α une valeur trop forte on augmente la valeur de la résistance et l'on obtient une trajectoire surbaissée. Malgré cet inconvénient, il est commode d'adopter ici la valeur trop forte $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi}$, parce que l'on arrive ainsi au plus grand degré de simplicité dans les expressions; mais il ne faut pas oublier qu'il en résulte pour les trajectoires des courbes moins

tendues, et comme conséquence des valeurs trop fortes pour les angles de projection dans les équations aux portées.

En introduisant la valeur $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi}$ dans nos équations, on obtient les expressions suivantes :

$$\text{Tangente....} \quad \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{g}{v_0^2\cos^2\varphi}\left(1 + \frac{b^2 v_0^4}{12}\right)x\left[F_1\left(\frac{4bc}{\cos\varphi}x\right) - \frac{n'^2}{3}F_1\left(\frac{-4bc}{\cos\varphi}x\right)\right],$$

$$\text{Trajectoire..} \quad y = x\operatorname{tang}\varphi - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}\left(1 + \frac{b^2 v_0^4}{12}\right)x^2\left[F\left(\frac{4bc}{\cos\varphi}x\right) - \frac{n'^2}{3}F\left(\frac{-4bc}{\cos\varphi}x\right)\right].$$

Ces expressions peuvent se mettre sous une autre forme, en employant la notation des fonctions hyperboliques, dont les Tables numériques sont bien connues; et cette transformation permet d'abord de conserver au paramètre n sa vraie valeur, et ensuite de faire plus rapidement les calculs des formules ci-dessus : car, s'il existe des Tables des $F(z)$ et $F_1(z)$, ces Tables ne sont qu'à argument positif et ne permettent pas, par suite, d'en tirer la valeur du second terme de la parenthèse.

En adoptant donc les notations

$$\operatorname{Sh}\lambda = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}, \quad \operatorname{Ch}\lambda = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}, \quad \operatorname{Th}\lambda = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{e^\lambda + e^{-\lambda}},$$

qui définissent les fonctions hyperboliques, nous aurons

$$n = \frac{e^{bv_0^2} + 1}{e^{bv_0^2} - 1}$$

(dans l'hypothèse $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi}$); d'où

$$n = \frac{e^{\frac{bv_0^2}{2}} + e^{-\frac{bv_0^2}{2}}}{e^{\frac{bv_0^2}{2}} - e^{-\frac{bv_0^2}{2}}} = \operatorname{Coth}\frac{bv_0^2}{2}$$

(dans le cas général, on aurait $n = \operatorname{Coth}\frac{bx^2u_0^2}{2}$ et l'on écrirait dans les

formules, pour dégager le facteur $bx^2u_0^2$,

$$n = \frac{1}{bx^2u_0^2}\left(\operatorname{Coth}\frac{bx^2u_0^2}{2}\,bx^2u_0^2\right).$$

D'autre part, on a

$$F(-mx) = \frac{e^{-mx}-1}{-mx} = \frac{1}{mx}\left(-e^{mx}+1+e^{mx}-e^{-mx}\right)$$
$$= -F(mx) + \frac{2\operatorname{Sh}mx}{mx}$$

et, de même,

$$F(-mx) = \frac{e^{-mx}+mx-1}{\frac{1}{2}m^2x^2}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}m^2x^2}\left(-e^{mx}+mx+1+e^{-mx}+e^{mx}-2\right)$$

ou

$$F(-mx) = -F(mx) + \frac{2\operatorname{Ch}mx-2}{\frac{1}{2}m^2x^2} = -F(mx) + \frac{4\operatorname{Sh}^2\frac{mx}{2}}{\frac{1}{2}m^2x^2}$$

ou

$$F(-mx) = -F(mx) + 2\frac{\operatorname{Sh}^2\frac{mx}{2}}{\left(\frac{mx}{2}\right)^2}.$$

En faisant les substitutions de ces expressions dans les équations, on obtient

$$y = x\operatorname{tang}\varphi - \frac{gx^2}{4v_0^2\cos^2\varphi}\,bv_0^2\operatorname{Coth}\frac{bv_0^2}{2}$$
$$\times\left\{F(mx) + \frac{n'^2}{3}\left[F(mx) - 2\frac{\operatorname{Sh}^2\frac{mx}{2}}{\left(\frac{mx}{2}\right)^2}\right]\right\}$$

ou

$$y = x\operatorname{tang}\varphi - \frac{bgx^2}{4\cos^2\varphi}\operatorname{Coth}\frac{bv_0^2}{2}\left(1+\frac{n'^2}{3}\right)\left[F(mx) - \frac{\frac{2n'^2}{3}}{1+\frac{n'^2}{3}}\,\frac{\operatorname{Sh}^2\frac{mx}{2}}{\left(\frac{mx}{2}\right)^2}\right]$$

et, de même,

$$\operatorname{tang}\zeta = \operatorname{tang}\varphi - \frac{bgx}{\cos^2\varphi}\operatorname{Coth}\frac{bv_0^2}{2}\left(1+\frac{n'^2}{3}\right)\left[F(mx) - \frac{\frac{2n'^2}{3}}{1+\frac{n'^2}{3}}\,\frac{\operatorname{Sh}mx}{mx}\right].$$

L'équation aux portées, qui donne l'angle de projection correspondant à une portée donnée, s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation de la trajectoire et l'on a

$$\sin 2\varphi = \frac{g\mathrm{X}}{2c_0^2}\left(1 + \frac{b^2c_0^4}{12}\right)\left[\mathrm{F}\left(\frac{4bc}{\cos\varphi}\mathrm{X}\right) - \frac{n'^2}{3}\mathrm{F}\left(\frac{-4bc}{\cos\varphi}\mathrm{X}\right)\right]$$

ou, avec les notations hyperboliques,

$$\sin 2\varphi = \frac{gb\mathrm{X}}{2}\operatorname{Coth}\frac{bc_0^2}{2}\left(1 + \frac{n'^2}{3}\right)\left[\mathrm{F}\left(\frac{4bc}{\cos\varphi}\mathrm{X}\right) - \frac{2n'^2}{3\left(1 + \frac{n'^2}{3}\right)}\frac{\mathrm{Sh}^2\frac{2bc\mathrm{X}}{\cos\varphi}}{\left(\frac{2bc\mathrm{X}}{\cos\varphi}\right)^2}\right],$$

équations qui se résoudraient par rapport à φ par une méthode d'approximations successives, dans laquelle on donnerait successivement à $\cos\varphi$, dans le second membre, les valeurs correspondant à la valeur obtenue précédemment pour φ. Mais il est inutile d'insister sur ces questions, qui ne sont pas susceptibles d'applications pratiques.

Effectivement, tous ces résultats ont été obtenus en considérant le projectile comme un point matériel, comme un disque élémentaire, ce qui est loin d'être les conditions de la pratique : on n'a donc tenu aucun compte de ses formes extérieures, et l'on a admis, en outre, qu'il ne s'élevait pas assez haut pour que l'on ne pût considérer la densité et la température de l'atmosphère comme constantes, et enfin que l'arc décrit était assez faible pour que l'on prît, sans erreur sensible, pour α la valeur $\frac{1}{\cos\varphi}$.

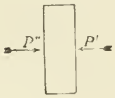
Ce sont tous ces éléments qu'il nous faut maintenant introduire successivement dans notre analyse.

INFLUENCE DE LA FORME ANTÉRIEURE DU MOBILE.

Nous venons d'étudier le mouvement d'un projectile considéré comme point matériel, ou, pour être plus exact, d'un mobile assimilé à un disque élémentaire se mouvant normalement à sa surface et

éprouvant sur ses deux faces des pressions p', p'' dont la différence donne la mesure de la résistance par unité de surface. Il convient

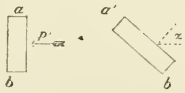
Fig. 3.



maintenant d'examiner l'influence de la forme antérieure du projectile et de calculer, en tenant compte de cet élément, la véritable valeur de la résistance.

On admet généralement que, pour passer de la pression correspondant à un mouvement du disque élémentaire normal à la surface à celle qui correspond à un mouvement oblique, il suffit de considérer, au

Fig. 4.



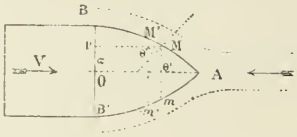
lieu de la vitesse de translation, la composante de cette vitesse suivant la normale à la surface du disque et prendre dans les formules (soit de Navier, soit de Zeuner), au lieu de la vitesse v, la vitesse $v \cos \alpha$.

M. Athanase Dupré admet cette loi, tout en faisant remarquer que son exactitude est loin d'être indiscutable, et que la composante parallèle à l'élément doit également intervenir. Je me contenterai, à son exemple, de cette approximation, ou plutôt j'adopterai les conclusions du raisonnement approché qui va suivre, conclusions qui sont d'accord avec celles de l'hypothèse ci-dessus.

Considérons un projectile, constitué par un corps de révolution, animé d'une vitesse V dans le sens de son axe, et imprimons-lui, ainsi qu'à l'air ambiant, une vitesse $-V$, ce qui ne change rien au mouvement relatif. Il restera immobile, tandis que l'air s'écoulera le long des parois. Nous aurons ainsi un filet gazeux, à la pression p_0, qui arrivera au sommet A et s'écoulera le long de l'ogive. En un point M,

la vitesse de translation ne sera plus que la composante, suivant la tan-

Fig. 5.



gente en M, de la vitesse V, c'est-à-dire $v \sin \delta'$. En faisant donc, dans la formule de Navier,

$$u_1 = V, \quad p_1 = p_0, \quad u_2 = V \sin \delta',$$

on aura

$$V^2 \sin^2 \delta' - V^2 = \frac{1}{\beta} L \frac{p_0}{p_x},$$

p_x étant la pression en M, ou

$$p_x = p_0 e^{\beta V^2 \cos^2 \delta'}. \tag{1}$$

On voit que nous négligeons ainsi l'influence du frottement, puisque, par l'emploi même de la formule de Navier, nous admettons la constance de la température du filet gazeux.

En acceptant la formule (1) sous ces réserves, nous en déduirons la pression totale sur l'ogive. Au point M, en effet, on peut décomposer la pression p_x, normale à l'élément en deux composantes, l'une perpendiculaire à l'axe, et qui aura pour valeur $p_x \sin \delta'$, et l'autre parallèle à l'axe, $p_x \cos \delta'$, et sur le parallèle élémentaire mm'MM', on aura les composantes

$$p_x \sin \delta' d\sigma,$$
$$p_x \cos \delta' d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'aire élémentaire, que l'on peut représenter par $2\pi x\, ds$, ds étant l'élément MM'.

La composante parallèle à l'axe est la seule qui puisse agir sur le mouvement de translation du projectile, l'autre composante ne pro-

duisant qu'une compression sur le métal : elle a pour valeur

$$2\pi x p_x \cos\theta' ds$$

ou, comme $\cos\theta' = \frac{dx}{ds}$,

$$2\pi x p_x dx.$$

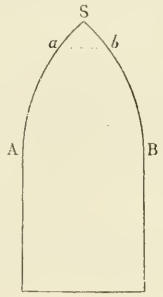
On aura donc la pression totale en prenant

$$P = 2\pi \int x p_x dx$$

entre les limites de x correspondant aux points A et B.

Les projectiles actuellement en service sont formés d'une partie cylindrique, terminée par une ogive, engendrée par la résolution d'un arc de cercle qui est, en général, tangent à la génératrice du cylindre,

Fig. 6.



ou qui est si peu incliné que l'on peut négliger cette inclinaison. Le projectile est dit ogival lorsque la courbe se continue jusqu'au sommet comme dans la figure : il est dit oblong lorsqu'il se termine par un méplat ab normal à l'axe.

Pour les projectiles ogivaux, nous aurons donc à prendre l'intégrale

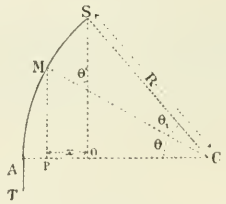
$$P = 2\pi \int p_x x dx$$

le long d'une courbe AS continue et parfaitement définie; pour les

projectiles oblongs, il faudrait prendre l'intégrale le long de Aa, puis calculer, d'autre part, la pression sur le méplat, et la composer avec celle sur la paroi ogivale : toutefois, vu les faibles dimensions du méplat, il conviendrait dans la pratique d'assimiler l'obus oblong à l'obus ogival; mais, dans l'étude théorique qui nous occupe, on ne s'attachera qu'aux projectiles ogivaux, afin de pouvoir obtenir exactement, d'après les formules, la valeur de la pression résultante.

Soit donc un projectile ogival, engendré par la révolution autour de

Fig. 7.



l'axe OS de l'arc de cercle SA, puis de la tangente AT au point A. Soient R le rayon CS, θ_1 l'angle ACS, on a, en M,

$$\cos\theta' = \sin\theta,$$

d'où

$$P = 2\pi p_0 \int_{\theta_1}^{\alpha} e^{bv^2 \sin^2\theta} x\, dx,$$

et, comme $x = PO = PC - OC$,

$$x = R(\cos\theta - \cos\theta_1),$$

$$dx = -R \sin\theta\, d\theta,$$

$$P = 2\pi R^2 p_0 \int_{\theta_1}^{0} e^{bv^2 \sin^2\theta} (\cos\theta_1 - \cos\theta) \sin\theta\, d\theta :$$

c'est cette intégrale définie qu'il s'agit d'évaluer

DE L'INTÉGRALE DÉFINIE $\int_{\theta_1}^{0} e^{bv^2\sin^2\theta}(\cos\theta_1 - \cos\theta)\sin\theta\, d\theta$.

Cette intégrale est la différence A — B des deux intégrales

$$A = \int_{\theta_1}^{0} e^{bv^2\sin^2\theta}\cos\theta_1 \sin\theta\, d\theta$$

et

$$B = \int_{\theta_1}^{0} e^{bv^2\sin^2\theta}\cos\theta \sin\theta\, d\theta.$$

1° *Calcul de* A. — On a

$$e^{bv^2\sin^2\theta} = e^{bv^2}e^{-bv^2\cos^2\theta}, \quad \text{d'où} \quad A = e^{bv^2}\cos\theta_1\int_{\theta_1}^{0} e^{-bv^2\cos^2\theta}\sin\theta\, d\theta$$

Posant, pour abréger l'écriture, $bv^2 = v'^2$; posant, en outre, $\cos\theta = z$, ce qui donne, pour les limites $z = 1$ et $z_1 = \cos\theta_1$, on aura

$$A = e^{v'^2}\cos\theta_1\int_{z_1}^{1} e^{-v'^2z^2} - dz$$

ou

$$A = \frac{1}{v'}e^{v'^2}\cos\theta_1\int_{1}^{z_1} e^{-z^2v'^2}v'\, dz.$$

Nous avons déjà rappelé qu'il existe des Tables de la fonction

$$\Pi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\, dt$$

et, d'après cela, nous aurons

$$A = \frac{e^{v'^2}}{v'}\cos\theta_1\frac{\sqrt{\pi}}{2}[\Pi(v'z_1) - \Pi(v') = \Pi(v'\cos\theta_1) - \Pi(v')],$$

2° *Calcul de B.* — On a

$$B = \int_{\theta_1}^{0} e^{bv^2\sin^2\theta}\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

ou

$$B = \frac{1}{2v'^2}\int_{\theta_1}^{0} e^{v'^2\sin^2\theta}(2v'^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = dv'^2\sin^2\theta).$$

et, en intégrant,

$$B = \frac{1}{2v'^2}\left(1 - e^{v'^2 \sin^2 \theta_1}\right)$$

L'expression A — B devient donc

$$\frac{1}{2v'^2}\left(e^{v'^2 \sin \theta_1} - 1\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{v'^2}}{v'}\cos\theta_1\left[\Pi(v') - \Pi(v'\cos\theta_1)\right],$$

et, en se rappelant que nous avons écrit

$$F_1(t) = \frac{e^t - 1}{t}$$

et qu'il existe des Tables de $F_1(t)$, on a finalement

$$P = 2\pi R^2 p_0 \left\{\frac{\sin^2\theta_1}{2} F_1(v'^2 \sin^2\theta_1) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{v'^2}}{v'}\cos\theta_1\left[\Pi(v') - \Pi(v'\cos\theta_1)\right]\right\}.$$

On peut donc, pour un projectile donné, calculer la valeur de P pour toutes les valeurs de v' et par suite de v.

Mais, pour la solution analytique des problèmes de Balistique, cette valeur de P en fonction de v est beaucoup trop compliquée : elle renferme des transcendantes qui ne se prêtent nullement à des intégrations ultérieures. Force est donc de chercher à représenter P par une autre fonction en différant suffisamment peu dans les limites des valeurs de v que l'on considère et se prêtant aux recherches de l'Analyse.

Reprenons à cet effet l'examen de l'intégrale définie

$$\int_{\theta_1}^{0} e^{v'^2 \sin^2\theta}(\cos\theta_1 - \cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$e^{v'^2}\int_{\theta_1}^{0} e^{-v'^2\cos^2\theta}(\cos\theta_1 - \cos\theta)\sin\theta\, d\theta,$$

soit, en posant $\cos\theta = z$ comme plus haut,

$$e^{v'^2}\int_{z_1}^{1} - e^{-v'^2 z^2}(z_1 - z)\, dz = e^{v'^2}\int_{1}^{z_1} e^{-v'^2 z^2}(z_1 - z)\, dz.$$

Développant $e^{-\varphi'^2 z^2}$ en série

$$e^{-\varphi'^2 z^2} = 1 - \varphi'^2 z^2 + \frac{\varphi'^4 z^4}{1.2} + \ldots + (-1)^n \frac{\overline{\varphi'^2 z^2}^n}{n!} + \ldots.$$

Nous aurons, en multipliant chacun des termes de ce développement par $(z - z_1)\,dz$ et intégrant de 1 à z_1, une série de termes qui représentera la valeur de l'intégrale définie que nous étudions. Ce développement est licite, car aucun des termes ne devient infini dans les limites de l'intégration. Le terme général de ce développement sera

$$T_n = e^{\varphi'^2} \int_1^{z_1} (-1)^n \frac{(\varphi'^2 z^2)^n}{n!} (z_1 - z)\,dz$$

ou

$$T_n = \frac{(-1)^n}{n!} \varphi'^{2n} e^{\varphi'^2} \int_{z_1}^{1} (z^{2n+1} - z_1 z^{2n})\,dz$$

ou

$$T_n = \frac{(-1)^n}{n!} \varphi'^{2n} e^{\varphi'^2} \left(\frac{z^{2n+2}}{(2n+2)} - \frac{z_1 z^{2n+1}}{2n+1} \right)_{z=z_1}^{z=1}$$

ou enfin

$$T_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\varphi'^{2n} e^{\varphi'^2}}{(2n+1)(2n+2)} [(2n+1) - (2n+2) z_1 + z_1^{2n+2}].$$

Le trinôme en z_1 admet la racine $z_1 = 1$ pour racine double; on peut donc écrire

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} [(2n+1) - (2n+2) z_1 + z_1^{2n+2}] = (1 - z_1)^2 \varphi_{2n}(z_1)$$

en posant

$$\varphi_{2n}(z_1) = \frac{(2n+1) - (2n+2) z_1 + z_1^{2n+2}}{(1 - z_1)^2 (2n+1)(2n+2)},$$

$$\varphi_{2n}(z_1) = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \times (z_1^{2n} + 2 z_1^{2n-1} + 3 z_1^{2n-1} + \ldots + p z_1^{2n-p+1} + \ldots + 2n + 1)$$

D'après cela, la pression résultante P peut se mettre sous la forme

$$P = \pi R^2 p_0 e^{\varphi'^2} (1 - z_1)^2 (a_0 + a_1 \varphi'^2 + a_2 \varphi'^4 + \ldots + a_n \varphi'^{2n} + \ldots),$$

en posant

$$a_n = (-1)^n \times \frac{2}{n!} \varphi_{2n}(z_1),$$

et l'expression

$$\pi R^2 (1 - z_1)^2$$

n'étant autre que l'aire de la section droite du cylindre base de l'ogive, que nous désignerons par S, il vient

$$P = p_0 S e^{v'^2} (a_0 + a_1 v'^2 + \ldots + a_n v'^{2n} + \ldots)$$

En remarquant que $a_0 = 1$, et que les signes sont alternés dans le polynôme, on est conduit à chercher à le représenter par une expression de la forme $e^{-\lambda v'^2}$ λ étant une constante à déterminer, ce qui donnerait pour P la valeur

$$P = p_0 S e^{v'^2} e^{-\lambda v'^2} = p_0 S e^{(1-\lambda) v'^2}$$

ou, en posant $1 - \lambda = \beta$,

$$P = p_0 S e^{\beta v'^2}$$

Le paramètre β sera moindre que l'unité, en valeur absolue, par définition, et il doit être positif : on a en effet

$$\frac{dP}{dv'^2} = \beta p_0 S e^{\beta v'^2}$$

qui a le signe de β, et, d'autre part, en différentiant par rapport à v'^2 l'expression

$$P = 2\pi R^2 p_0 \int_{\theta_1}^{0} e^{v'^2 \sin^2\theta} (\cos\theta_1 - \cos\theta) \sin^3\theta \, d\theta,$$

il vient

$$\frac{dp}{dv'^2} = 2\pi R^2 p_0 \int_{\theta_1}^{0} e^{v'^2 \sin^2\theta} (\cos\theta_1 - \cos\theta) \sin^3\theta \, d\theta ;$$

or cette expression se compose d'une somme d'éléments positifs, car le facteur $e^{v'^2 \sin^2\theta} \sin^3\theta$ est constamment positif, et, de θ_1 à o, les deux

facteurs $(\cos\delta_1 - \cos\delta)$ d'une part et $d\delta$ de l'autre, étant négatifs, donnent un produit positif.

L'expression $\frac{dP}{dv'^2}$ étant positive dans les limites considérées, il doit donc en être de même de β.

Reste à calculer numériquement ce paramètre β et à se rendre ainsi compte de l'approximation obtenue.

On l'a calculé pour des valeurs de δ_1 égales à 37° et 45°, qui sont les valeurs correspondant aux projectiles ogivaux en usage, et pour des valeurs de v' variant de 0,50 à 1,50. Dans les conditions expérimentales admises (température de 15° et densité de l'atmosphère égale à 1,208, ce qui correspond à la pression 760^{mm}, lorsque l'air est à moitié saturé), la valeur de b est égale à $\frac{1}{420^2}$. Les variations de v' de 0,50 à 1,50 correspondent à des variations de la vitesse v depuis 210^m jusqu'à 630^m, ce qui comprend tous les cas des tirs actuels.

Les Tableaux ci-dessous montrent la comparaison des valeurs obtenues pour $\frac{P}{p_0 S}$ par la formule exacte donnée ci-dessus et par la formule exponentielle approchée $e^{\beta v'^2}$. On voit que les écarts sont très faibles, et sont les uns positifs, les autres négatifs, ce qui permet d'admettre la substitution de l'une des fonctions à l'autre sans qu'il en résulte d'erreur sensible dans les applications.

Angle de 45°, $\beta = 0,1878$.

		Valeur de $\frac{P}{p_0 S}$		
v.	v'.	exacte.	approchée.	Différence.
210.....	0,50	1,049	1,048	— 0,001
315.....	0,75	1,107	1,111	+ 0,004
420.....	1,00	1,212	1,207	— 0,005
525.....	1,25	1,225	1,226	+ 0,001
630.....	1,50	1,556	1,526	— 0,003

Angle de 37°, $\beta = 0,133$.

210.....	0,50	1,035	1,034	— 0,001
315.....	0,75	1,085	1,078	— 0,007
420.....	1,00	1,134	1,142	+ 0,008
525.....	1,25	1,208	1,231	+ 0,023
630.....	1,50	1,356	1,349	— 0,007

Nous admettrons donc, dans la suite de ce travail, que l'on peut représenter la résistance de l'air sur la partie antérieure des projectiles ogivaux par la formule

$$P = p_0 e^{\beta b v^2} = p_0 e^{b' v^2},$$

le paramètre b' ou βb étant déterminé par des calculs théoriques, sans rien demander à l'expérience [1].

BALISTIQUE DES PROJECTILES OGIVAUX.

Nous venons d'établir dans les lignes qui précèdent l'expression de la résistance opposée par l'air au mouvement de la partie antérieure du projectile, et, en désignant par S la section droite et par p_0 la pression atmosphérique, nous avons trouvé pour valeur

$$p_0 S e^{b' v^2}.$$

Comme nous avons admis que le projectile restait couché sur la tangente à la trajectoire, nous n'avons pas à tenir compte des pressions sur la partie cylindrique. Cependant le projectile est muni, dans le voisinage du culot, d'une ceinture de cuivre, faisant une légère saillie sur le contour, dont le rôle a été d'obturer l'âme de la pièce et de faire prendre à l'obus le mouvement de rotation sous l'action des rayures. L'influence de cette ceinture est incontestable au point de vue balistique : de sa position et de son fonctionnement dépendent la régularité de départ de l'obus et sa stabilité; mais il ne semble pas qu'elle ait une grande importance en tant qu'obstacle opposé à l'écoulement de l'air le long des parois, et nous avons, en conséquence, négligé d'en tenir compte.

---

[1] Pour les applications on a une valeur suffisamment approchée de b en prenant le coefficient du terme en v^2 du développement en série de la valeur de P déduite de la formule exacte, soit

$$b' = \frac{3 - 2\cos\theta - \cos^2\theta}{6}.$$

Par contre, lorsque l'air arrive à l'extrémité de la paroi latérale du projectile, il se répand à l'arrière du culot et il y aurait lieu d'étudier de quelle façon se produit cet écoulement. Cette question ne semble pouvoir se résoudre qu'à l'aide d'hypothèses plus ou moins hasardées, et ne pas comporter de solution aussi précise que celle des pressions sur la partie antérieure, où l'on avait, au moins, des indications sur le trajet imposé aux filets gazeux par la forme de l'ogive. Son examen fera le sujet de recherches ultérieures. Toutefois, en se reportant aux considérations qui ont été exposées à propos du disque élémentaire et qui ont conduit à l'expression $p'' = p_0 e^{-b''V^2}$, on est amené à étudier analytiquement le problème du mouvement des projectiles en représentant la poussée par une expression $p = p_0 e^{-b''V^2}$, la détermination du paramètre b'' devant faire l'objet du travail ultérieur, annoncé plus haut. Cependant, on peut dire, dès à présent, qu'il devra être moindre que b, car nous avons obtenu $p'' = p_0 e^{-b''V^2}$ en ne considérant au culot que l'action des gaz compris dans le prolongement du cylindre qui forme le corps de l'obus, et à cette pression il faudrait ajouter celle provenant des gaz extérieurs à ce cylindre, qui viennent également combler le vide laissé derrière lui par le projectile.

Nous allons donc examiner la question du mouvement lorsque la résistance est représentée par une expression de la forme

$$R = p_0 S\left(e^{bV^2} - e^{-bV^2}\right).$$

En désignant, comme plus haut, par P le poids du projectile, et par c l'expression

$$c = \frac{p_0 g S}{P},$$

conservant d'ailleurs les mêmes notations pour les éléments de la trajectoire, nous aurons le système d'équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c\left(e^{bV^2} - e^{-bV^2}\right)\cos\delta,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -c\left(e^{bV^2} - e^{-bV^2}\right)\sin\delta - g,$$

$$\frac{dy}{dx} = p = \operatorname{tang}\delta.$$

A ce système, nous substituons, par la même marche que celle qui a déjà été suivie, et à l'aide de l'introduction du paramètre α, le système

$$\frac{dx}{dt} = u = v\cos\vartheta,$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{u^2},$$

$$dy = p\,dx,$$

$$\alpha\frac{u\,du}{dx} = -c\left(e^{b'\alpha^2u^2} - e^{-b''\alpha^2u^2}\right);$$

cette dernière équation, en posant $\alpha u = u'$, s'écrit

$$-c\alpha\,dx = \frac{u'\,du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}}$$

et, en substituant la valeur de dx dans les autres équations, on arrivera au système

$$-c\alpha x = \int \frac{u'\,du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}},$$

$$p = \frac{g\alpha}{c}\int \frac{u'\,du'}{u'^2\left(e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}\right)}$$

et, par suite,

$$dy = p\,dx = -\frac{g}{c^2}\,\frac{u'\,du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}}\int \frac{u'\,du'}{u'^2\left(e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}\right)},$$

$$t = -\frac{1}{c}\int \frac{du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}}.$$

Mais cette solution n'a qu'un intérêt purement théorique; effectivement, si l'on peut toujours obtenir la valeur de x sous forme finie comme il est aisé de s'en rendre compte en posant $u'^2 = kz$, k étant une constante égale au dénominateur commun des deux nombres b' et b'', il n'en est pas de même des autres expressions, qui devraient être développées en séries, et les termes de ces développements, qui se rattacheraient pour la plupart au type du logarithme intégral, seraient eux-mêmes d'un calcul fort compliqué.

On est donc conduit à chercher à prendre x pour variable indépendante, quitte à sacrifier, pour cela, un peu de l'exactitude de l'ana-

lyse et à se contenter d'intégrations approchées; et, pour cela, il y a lieu de chercher à intégrer l'équation différentielle

$$-c\alpha dx = \frac{u'\,du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}},$$

de telle sorte que l'on puisse résoudre par rapport à u'^2 l'équation obtenue et substituer ensuite la valeur de u'^2 ainsi trouvée dans les équations

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{u^2} = -\frac{g\alpha^2}{u'^2}$$

et

$$dy = p\,dx,$$

ce qui permettra d'exprimer p et y en fonction de la variable indépendante x.

De l'intégrale définie $\int_{u'_0}^{u} \frac{u'\,du'}{e^{b'u'^2} - e^{-b''u'^2}}$. — On peut écrire la fonction placée sous le signe $\int$

$$\frac{e^{b''u'^2}u'\,du'}{e^{(b'+b'')u'^2} - 1}.$$

L'analyse faite précédemment nous permet de nous rendre compte de la valeur de b', puisque nous avons appris à calculer ce paramètre, et nous pouvons dire que, dans les limites de la pratique, on aura $\frac{b}{b}$ compris entre 0,1 et 0,2, b étant toujours la constante $\frac{\delta}{2gp_0}$.

Quant à la valeur de $\frac{b''}{b}$, nous en avons ajourné l'étude, remarquant seulement qu'elle devait être moindre que l'unité.

On peut maintenant mettre la différentielle sous une des deux formes

$$e^{\frac{b''}{2}u'^2} \cdot \frac{e^{\frac{b''+b'}{2}u'^2}}{e^{(b'+b'')u'^2} - 1}\,u'\,du'$$

et

$$e^{-b'u'^2}\,\frac{e^{(b'+b'')u'^2}u'\,du'}{e^{(b'+b'')u'^2} - 1}$$

ou

$$e^{\frac{b''-b'}{2}u'^2}\, d\,\frac{1}{2(b'+b'')}\,\mathrm{L}\,\frac{e^{\left(\frac{b'+b''}{2}\right)u'^2}-1}{e^{\left(\frac{b'+b''}{2}\right)u'^2}+1}$$

dans le premier cas, et

$$e^{-b'u'^2}\, d\,\frac{1}{2(b'+b'')}\,\mathrm{L}\left(e^{(b'+b'')u'^2}-1\right),$$

dans le second cas.

Par suite, en considérant un arc de courbe limité aux points où les valeurs de u' sont u'_1 et u'_2, nous pourrons obtenir une valeur approchée de l'intégrale cherchée en prenant, dans le premier cas,

$$\mathrm{A}\,\frac{1}{2(b'+b'')}\,\mathrm{L}\,\frac{e^{\frac{b'+b''}{2}u'^2}-1}{e^{\frac{b'+b''}{2}u'^2}+1}$$

et, dans le second,

$$\mathrm{C}\,\frac{1}{2(b'+b'')}\,\mathrm{L}\,e^{(b'+b'')u'^2}-1,$$

A et C étant des coefficients constants déterminés par la condition d'avoir, le premier, une valeur intermédiaire entre

$$e^{\frac{b''-b'}{2}u_1'^2} \quad \text{et} \quad e^{\frac{b''-b'}{2}u_2'^2}$$

et le second, une valeur intermédiaire entre

$$e^{-b'u_1'^2} \quad \text{et} \quad e^{-b'u_2'^2},$$

pourvu que ces valeurs limites ne soient que très peu différentes.

Toutefois, pour que cette méthode soit admissible, elle devra être appliquée au calcul de l'arc entier u'_1, u'_2, et ce n'est que pour les éléments du point limite u'_1 que l'on peut admettre une approximation suffisante : il se peut qu'entre u'_1 et u'_2 les valeurs réelles et approchées de x diffèrent notablement, mais les points extrêmes seraient sensiblement exacts.

De cette manière, on obtiendra, pour x, l'une des deux valeurs

$$-2(b'+b'')c\alpha x = \mathrm{AL}\frac{e^{\left(\frac{b'+b''}{2}\right)u'^2}-1}{e^{\left(\frac{b'+b''}{2}\right)u'^2}+1} + \text{const.}$$

et

$$-2(b'+b'')c\alpha x = \mathrm{CL}(e^{(b'+b'')u'^2}-1) + \text{const.}$$

En posant, dans la première formule,

$$\frac{2(b'+b'')c\alpha}{\mathrm{A}} = m, \quad b'+b'' = 2\mathrm{B},$$

on aura

$$-mx = \mathrm{L}\frac{e^{\mathrm{B}u'^2}-1}{e^{\mathrm{B}u'^2}+1} + \text{const.}$$

Cette expression a la même forme que celle qui a été obtenue dans l'étude de la Balistique du point matériel, et qui était

$$-mx = \mathrm{L}\frac{e^{b\alpha^2u^2}-1}{e^{b\alpha^2u^2}+1} + \text{const.},$$

où l'on avait $m = 4bc\alpha$.

Les autres équations du système sont d'ailleurs identiques; il en résulte que toute l'analyse déjà faite est applicable, et par suite toutes les formules finales, à la condition d'y substituer à m et à b les valeurs

$$2\frac{b'+b''}{\mathrm{A}}c\alpha \quad \text{et} \quad \frac{b'+b''}{2}.$$

L'autre valeur de x donnera lieu à de nouveaux calculs et à l'établissement d'un nouveau système de formules, et l'on devra recourir à l'un ou à l'autre système, selon que l'approximation sera plus forte et que l'on pourra prendre avec moins d'erreur une valeur moyenne soit pour $e^{\frac{b''-b'}{2}u'^2}$, soit pour $e^{-b'u'^2}$, ou que les variations de ces deux exponentielles seront plus faibles entre les deux limites considérées: dans le premier cas, on prendra les formules du point matériel, et, dans le second cas, celles que nous allons établir.

Nous avons d'abord l'expression

$$-mx = \mathrm{L}\left(\frac{e^{\mathrm{B}u'^2} - 1}{n}\right),$$

n étant une constante, en posant

$$\mathrm{B} = b' + b'', \quad m = \frac{2\mathrm{B}c\alpha}{\mathrm{C}},$$

et, en déterminant la constante à l'aide de la valeur u_0 de u' pour $x = 0$, on aura

$$n = e^{\mathrm{B}u_0^2} - 1$$

et enfin

$$mx = \mathrm{L}\frac{e^{\mathrm{B}u_0^2} - 1}{e^{\mathrm{B}u'^2} - 1}$$

ou, en résolvant par rapport à $u' = \alpha u$, afin d'exprimer la vitesse en fonction de la variable indépendante x,

$$e^{\mathrm{B}\alpha^2 u^2} = 1 + ne^{-mx}$$

ou

$$(1) \qquad \mathrm{B}\alpha^2 u^2 = \mathrm{L}(1 + ne^{-mx}).$$

Nous avons, en outre, les autres équations établies plus haut,

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = u,$$

$$(3) \qquad u = v\cos\varphi = v\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$(4) \qquad \frac{dp}{dx} = -\frac{g}{u^2},$$

$$(5) \qquad dy = p\,dx,$$

et nous allons chercher à en déduire l'équation de la courbe. Substituant, à cet effet, dans (4), à u^2 sa valeur tirée de (1), il vient

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g\mathrm{B}\alpha^2}{\mathrm{L}(1 + ne^{-mx})}$$

ou

$$dp = -g\mathrm{B}\alpha^2\frac{dx}{\mathrm{L}(1 + ne^{-mx})}.$$

L'intégrale définie du second membre n'existe pas sous forme finie : il y a lieu de l'évaluer à l'aide d'un développement en série convenable. Soit, à cet effet,

$$1 + ne^{-mx} = \frac{1+z}{1-z}$$

ou

$$z = \frac{ne^{-mx}}{2 + ne^{-mx}} < 1,$$

on aura

$$L(1 + ne^{-mx}) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) = 2z\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \cdots\right)$$

et, par suite,

$$dp = -gB\alpha^2 dx \frac{1}{2z\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \cdots\right)}$$

ou, en effectuant la division,

$$dp = -gB\alpha^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{4z^3}{45} - \cdots\right) dx,$$

c'est-à-dire

$$dp = -g\frac{B\alpha^2}{2}\left(\frac{2 + ne^{-mx}}{ne^{-mx}} - \frac{1}{3}\frac{ne^{-mx}}{2 + ne^{-mx}} - \cdots\right) dx;$$

en se bornant aux deux premiers termes du développement et en posant $n' = \frac{1}{n}$, pour simplifier l'écriture, on obtient

$$dp = -g\frac{B\alpha^2}{2}\left(1 + 2n'e^{mx} - \frac{1}{3}\frac{ne^{-mx}}{2 + ne^{-mx}}\right) dx,$$

et intégrant de o à x et désignant par p_0 la valeur initiale de p,

$$(6) \qquad p - p_0 = -g\frac{B\alpha^2}{2}\left[x + \frac{2n'(e^{mx} - 1)}{m} \frac{1}{3m} L\frac{2 + ne^{-mx}}{2 + n}\right],$$

équation qui donne l'inclinaison de la tangente en fonction de l'abscisse.

En substituant, dans cette équation (6), à p sa valeur $p = \frac{dy}{dx}$, on aura

$$dy - p_0 dx = -g\frac{B\alpha^2}{2}\left(x + 2n'\frac{e^{mx}-1}{m} + \frac{1}{3m}\,\mathrm{L}\,\frac{2+ne^{-mx}}{2n}\right)dx,$$

ou, intégrant de o à x,

$$y - p_0 x = -g\frac{B\alpha^2}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2n'\frac{e^{mx}-mx-1}{m^2}\right) - g\frac{B\alpha^2}{6m}\mathrm{T},$$

en désignant par T l'expression

$$\mathrm{T} = \int_0^x \mathrm{L}\,\frac{2+ne^{-mx}}{2+n}\,dx,$$

que nous allons calculer.

Cette expression n'est pas intégrable sous forme finie; posons donc

$$\frac{2+ne^{-mx}}{2+n} = \frac{1-z}{1+z},$$

d'où

$$z = \frac{n}{n+4}\,\frac{1-e^{-mx}}{1+\frac{n}{n+4}e^{-mx}},$$

et prenant à la place du logarithme le premier terme $-2z$ de son développement, on aura

$$\mathrm{T} = \frac{-2n}{n+4}\int_0^x \frac{1-e^{-mx}}{1+\frac{n}{n+4}e^{-mx}}\,dx$$

ou

$$\mathrm{T} = \frac{-n}{n+4}\left(2x + 2\,\frac{1+\frac{n}{n+4}}{m\,\frac{n}{n+4}}\,\mathrm{L}\,\frac{1+\frac{n}{n+4}e^{-mx}}{1+\frac{n}{n+4}}\right).$$

Sous cette forme, l'expression T n'est pas pratique pour des calculs

numériques; pour la simplifier, on peut écrire le logarithme

$$\mathrm{L}\frac{1+\frac{n}{n+4}e^{-mx}}{1+\frac{n}{n+4}} = \mathrm{L}\,1 - \frac{\frac{n}{n+4}(1-e^{-mx})}{1+\frac{n}{n+4}}$$

et, en ne prenant que le premier terme, on aura, pour T,

$$\mathrm{T} = \frac{-n}{n+4}\left[2x + 2\frac{1+\frac{n}{n+4}}{m\frac{n}{n+4}}\frac{\frac{n}{n+4}(e^{-mx}-1)}{1+\frac{n}{n+4}}\right],$$

ou

$$\mathrm{T} = \frac{-2n}{n+4}\left(\frac{e^{-mx}+mx+1}{m}\right),$$

ce qui donne finalement, pour équation de la courbe,

$$y = p_0 x - g\frac{\mathrm{B}\alpha^2}{2}\left[\frac{x^2}{2} + 2n'\frac{e^{mx}-mx-1}{m^2} - \frac{2n}{3(n+4)}\frac{e^{-mx}+mx-1}{m^2}\right],$$

valeur dans laquelle on a négligé des termes négatifs dans la parenthèse.

Nous retrouvons ici l'expression

$$e^{mx} - mx - 1,$$

déjà rencontrée dans la Balistique du point matériel, et en posant, comme plus haut,

$$\mathrm{F}(mx) = \frac{e^{mx}-mx-1}{\frac{1}{2}m^2x^2},$$

il vient

$$(7)\quad y = p_0 x - g\frac{\mathrm{B}\alpha^2 x^2}{2}\left[\frac{1}{2} + n'\mathrm{F}(mx) - \frac{n}{3(n+4)}\mathrm{F}(-mx)\right].$$

En mettant le coefficient n' en facteur, on obtient, pour le second terme de la valeur de y,

$$-\frac{gx^2}{2}(\mathrm{B}\alpha^2 n')\left[\frac{n}{2} + \mathrm{F}(mx) - \frac{n^2}{3(n+4)}\mathrm{F}(-mx)\right],$$

et l'on a

$$B\alpha^2 n' = \frac{B\alpha^2}{e^{B\alpha^2 u_0^2} - 1} = \frac{1}{u_0^2} \frac{1}{\dfrac{e^{B\alpha^2 u_0^2} - 1}{B\alpha^2 u_0^2}}.$$

Nous avons déjà rencontré (*Balistique du point matériel*) la fonction $F_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ dont il existe des Tables : nous écrirons donc

$$B\alpha^2 n' = \frac{1}{u_0^2} \frac{1}{F_1(B\alpha^2 u_0^2)};$$

d'où

$$y = p_0 x - \frac{g x^2}{2 u_0^2 F_1(B\alpha^2 u_0^2)} \left[\frac{n}{2} + F(mx) - \frac{n^2}{3(n+4)} F(-mx)\right].$$

D'autre part, en portant dans l'équation qui donne p, à la place de $L \frac{2 + n e^{-mx}}{2 + n}$, la valeur que nous avons en réalité substituée pour l'intégration, c'est-à-dire

$$\frac{2n}{3(n+4)} \frac{e^{-mx} - 1}{m}$$

$\left(\text{dérivée du terme qui représente, dans l'expression de } y, \int L \frac{2 + n e^{-mx}}{2 + n}\right)$, il vient

$$p - p_0 = -\frac{g B\alpha^2}{2}\left[x + 2n' \frac{e^{mx} - 1}{m} + \frac{2n}{3(n+4)} \frac{e^{-mx} - 1}{m}\right],$$

et les mêmes transformations que pour l'équation en g (mise en facteur de n', et substitution aux exponentielles de leur expression à l'aide des fonctions F_1) donneront finalement

$$p = p_0 - \frac{g x}{u_0^2 F_1(B\alpha^2 u_0^2)} \left[\frac{n}{2} + F_1(mx) - \frac{n^2}{3(n+4)} F_1(-mx)\right].$$

Durée du trajet. — En éliminant la variable x entre les deux équations

$$dx = u\,dt, \quad mx = L \frac{e^{Bu_0^2 t} - 1}{e^{Bu^2 t} - 1},$$

il vient

$$-\frac{c}{C}\,dt = \frac{du'}{1-e^{-Bu'^2}} = (1 + e^{-Bu'^2} + e^{-2Bu'^2} + \ldots +)\,du',$$

ou

$$-\frac{c}{C}\,dt = \sum_{k=0}^{k=+\infty} e^{-kBu'^2}\,du' = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{1}{\sqrt{kB}}\,e^{-kBu'^2}\,d(u'\sqrt{kB}),$$

à intégrer de o à t, et par suite de u'_0 à u'.

En désignant, comme précédemment, par $\Pi(z)$ la fonction

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}\,dz,$$

on a

$$\int_{u'_0}^{u'} e^{kBu'^2}\,d(u'\sqrt{kB}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Pi(u'\sqrt{Bk} - u'_0\sqrt{BK})$$

et par suite

$$\frac{c}{C}\,t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{B}}\sum_{k=0}^{k=+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\left[\Pi(u'_0\sqrt{Bk}) - \Pi(u'\sqrt{Bk})\right]$$

ou, en mettant le paramètre α en évidence et dégageant le premier terme ($k = 0$) qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$,

$$\frac{c}{C}\,t = \alpha(u_0 - u) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}}\sum_{k=1}^{k=+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\left[\Pi(\alpha u_0\sqrt{B}\sqrt{k}) - \Pi(\alpha u\sqrt{B}\sqrt{k})\right].$$

Nous avons ainsi obtenu l'expression de tous les éléments de la trajectoire, vitesse, durée, tangente, ordonnée. Rappelons ici l'ensemble des formules

$$m = \frac{2Bc\alpha}{C}, \quad n = e^{B\alpha^2 u_0^2} - 1,$$

C étant une valeur intermédiaire entre les valeurs que prend $e^{B\alpha^2 u^2}$ dans l'étendue de l'arc considéré.

Vitesse :

$$B\alpha^2 u^2 = L(1 + ne^{-mx}).$$

Durée :

$$\frac{c}{C}t = \alpha(u_0 - u) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}}\sum_{k=1}^{k=+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\left[\Pi(\alpha u_0\sqrt{B}\sqrt{k}) - \Pi(\alpha u\sqrt{B}\sqrt{k})\right].$$

Trajectoire :

$$y = p_0 x - \frac{gx^2}{2u_0^2 F_1(B\alpha^2 u_0^2)}\left[\frac{n}{2} + F(mx) - \frac{n^2}{3(n+4)}F(-mx)\right].$$

Tangente :

$$p = p_0 - \frac{gx}{u_0^2 F_1(B\alpha^2 u_0^2)}\left[\frac{n}{2} + F_1(mx) - \frac{n^2}{3(n+4)}F_1(-mx)\right].$$

Discussion des paramètres. — Les mêmes raisons qui ont été développées dans la Balistique du point matériel nous conduisent à donner au paramètre α la valeur un peu trop forte $\frac{1}{\cos\varphi}$, φ étant l'angle initial dont la tangente est p_0, sous la réserve que φ restera au-dessous de 10°; pour des arcs de plus d'amplitude, il y aurait lieu de subdiviser la courbe et d'adopter, d'après les Tables dressées à cet effet, diverses valeurs de α.

Dans toutes les formules, on peut d'ailleurs, en vertu de l'hypothèse $\alpha\cos\theta = 1$, remplacer le produit αu par v, puisque u est égal à $v\cos\theta$, et ce n'est qu'après cette substitution qu'il y aura lieu de fixer la valeur de α; cette substitution conduit au système

$$m = \frac{1}{C}2Bc\alpha,$$

$$n = e^{Bc_0^2} - 1.$$

Vitesse :

$$Bv^2 = L(1 + ne^{-mx}),$$

Durée :

$$\frac{c}{C}t = c_0 - c + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{B}}\sum_{k=1}^{k=+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\left[\Pi(c_0\sqrt{B}\sqrt{k}) - \Pi(c\sqrt{B}\sqrt{k})\right],$$

Trajectoire :

$$y = p_0 x - \frac{gx^2}{2u_0^2 F_1(Bv_0^2)}\left[\frac{n}{2} + F(mx) - \frac{n^2}{3(n+4)} F(-mx)\right],$$

Tangente :

$$p = p_0 - \frac{gx}{u_0^2 F_1(Bv_0^2)}\left[\frac{n}{2} + F_1(mx) - \frac{n^2}{3(n+4)} F_1(-mx)\right].$$

Le paramètre α ne se retrouve plus que dans m.

Quant au paramètre C, valeur intermédiaire entre les valeurs limites de $e^{-b'u^2}$, c'est-à-dire $e^{-b'\alpha^2 u'^2}$ ou $e^{-b'v^2}$, on le prendra sous la forme la plus aisée à calculer, et, en désignant par v_1 la vitesse finale, on prendra

$$C^2 = e^{-b'v_0^2} \times e^{-b'v_0^2} \quad \text{ou} \quad C = e^{-b'v_0 v_1},$$

et en posant

$$\gamma = e^{b'v_0 v_1},$$

il viendra

$$m = 2Bcx\gamma.$$

En substituant alors à B et à c leurs valeurs, savoir

$$B = b' + b'' = \frac{b' + b''}{b} \times \left(b = \frac{T_0}{2gp_0 v_0 T_1}\right)$$

et

$$c = \frac{p_0 g S}{P},$$

désignant $\frac{b' + b''}{b}$ par β, on aura

$$m = \frac{\delta S}{P}\alpha\beta\gamma,$$

δ étant le poids spécifique de l'atmosphère dans les conditions de l'expérience, ou

$$m = \delta\frac{S}{P}\beta \times \alpha\gamma.$$

Le premier produit $\delta\frac{S}{P}\beta$ est indépendant des conditions particulières du tir (angle initial et vitesse); il forme donc la caractéristique du

projectile : quant au produit $\alpha\gamma = \frac{e^{b'v_0v_1}}{\cos\varphi}$, on peut en faire abstraction en première approximation, car il diffère peu de l'unité dans les conditions ordinaires : dans les mêmes limites, la densité δ varie peu sur le trajet du projectile, de telle sorte que l'on peut se contenter, pour la valeur de m, du produit constant $m = \delta \frac{S}{P} \beta$.

Pour $\beta = \frac{b' + b''}{b}$, nous avons appris à calculer exactement b' : quant à b'', sa recherche devra faire l'objet d'études ultérieures, mais, dans les applications qui vont suivre, on le prendra égal à b, valeur trop forte, puisqu'elle revient à supposer que l'air latéral ne se précipite pas dans le vide formé par le projectile en avançant : on aura donc pour m une valeur trop considérable, en prenant, comme nous allons le faire, $\beta = 1 + \frac{b'}{b}$; mais toute autre valeur donnée à b'' eût dû être adoptée sans raison théorique d'aucun ordre et déterminée par des conditions purement empiriques, pour faire cadrer les résultats des formules avec ceux de l'expérience, et ce mode d'opérer serait absolument contraire au but et à l'esprit de la présente étude.

Cherchons donc à déduire, des formules ci-dessus, quelques résultats pratiques, à comparer avec ceux de l'expérience. Pour ces derniers, on les trouve en grand nombre dans les Tables de tir, qui ne sont, au moins en ce qui concerne les angles à employer pour obtenir une portée déterminée, que le résumé de données expérimentales compensées entre elles. Cherchant à appliquer nos formules au même problème et faisant pour cela $y = 0$ dans l'équation de la trajectoire, on obtient

$$\sin 2\varphi = \frac{gX}{c_0^2 F_1(Bc_0^2)} \left[\frac{n}{2} + F(mX) - \frac{n^2}{3(n+4)} F(-mX) \right].$$

A l'aide de cette formule, on a calculé des angles de tir pour divers projectiles ogivaux et oblongs. Ne perdons pas de vue qu'aucun des paramètres de la formule n'est déduit d'expériences spéciales : tous sont déterminés par la théorie pure, à l'aide des données classiques sur la valeur de g, accélération de la pesanteur, et de la densité de l'air.

On peut d'abord se rendre compte de l'influence de la forme anté-

rieure du projectile; on a, à cet effet, calculé comme exemple les angles de tir d'un même projectile : 1° en le considérant comme un point matériel, et 2° en tenant compte de sa forme antérieure. Les résultats sont les suivants :

Portée.	Angle correspondant, donné par la formule du point matériel.	par la formule actuelle.	par les Tables de tir.	Différence entre les deux derniers angles.
m	° ′	° ′	° ′	
1000.....	1.49	1.19	1.23	— 4′
2000.....	5.18	2.52	3	— 8′
3000.....	9.44	4.45	4.52	— 7′
4000.....	18.52	7. 3	6.58	+ 5′
5000.....	imaginaire	9.56	9.19	+ 37′

Le seul examen de ce Tableau montre l'importance de l'étude qui a été faite : les résultats obtenus dans l'hypothèse du point matériel sont évidemment absurdes, ceux déduits de l'examen des pressions antérieures peuvent être considérés comme exacts, dans les limites de la précision que comporte la question, jusqu'à 4000^{m}.

On trouvera ci-après d'autres Tableaux analogues, donnant les angles calculés et les angles fournis par les Tables pour divers projectiles.

L'examen de tous ces Tableaux dénote une concordance suffisante, entre la théorie et l'expérience, jusqu'à des distances d'environ 4000^{m}. Au delà, la formule théorique donne des angles beaucoup trop forts : la raison principale en a été annoncée plus haut; en donnant à b'' une valeur trop forte, c'est-à-dire tenant insuffisamment compte de la poussée arrière, on a exagéré la résistance opposée au mobile, ce qui devait conduire à des angles trop élevés : cela s'est traduit analytiquement par une valeur trop considérable du paramètre m, et si cette valeur, lorsque X est petit, n'entraîne pour $F(mX)$ que des nombres encore admissibles, il n'en est pas ainsi lorsque X dépasse un certain nombre, 3000^{m} ou 4000^{m}.

En résumé, nous avons, dans cette étude, après avoir examiné le mouvement d'un point matériel soumis à une résistance atmosphérique déterminée par la loi de Navier, calculé la valeur de cette résistance, d'après la forme de la partie antérieure du mobile; puis, réservant à un prochain travail la discussion des pressions arrière, et admettant

provisoirement pour ces pressions une valeur trop faible, on a établi à nouveau, par une analyse approximative, les équations du mouvement du projectile considéré, et l'on a trouvé un accord suffisant entre la théorie et l'expérience depuis o jusqu'à 3000^{m}. Il nous reste encore à étudier ces pressions arrière, à examiner la question de la variation de la densité de l'air avec la hauteur du projectile au-dessus du sol, et ces deux problèmes résolus, par l'établissement de formules définitives, avec l'approximation nécessaire à la pratique, on sera arrivé, par la théorie pure et sans le secours de données expérimentales spéciales, à déterminer la loi du mouvement dans l'air d'un solide de révolution, des formes actuellement en usage, et cela d'après une marche générale pouvant s'appliquer à un corps quelconque. Peut-être ces résultats devront-ils être pris en sérieuse considération dans les recherches balistiques; peut-être aussi pourront-ils être regardés comme une démonstration *a posteriori* des lois physiques que l'on a admises comme point de départ; sur ces deux points, c'est à des voix plus autorisées que la mienne qu'il appartient de prononcer, soit d'après les résultats déjà acquis ci-dessus, soit seulement après la solution complète des problèmes signalés plus haut comme restant à traiter.

TABLEAUX DIVERS.

Obus de 34^{cm}. — $v_0 = 492^{m}$.

Portée.	Angle donné par la théorie.	Angle donné par les Tables.	Erreur absolue.	Erreur relative.	Observation.
m	° ′	° ′	° ′		
1000 ...	1.11	1.20	— 0. 9	$< \frac{1}{15}$	Résultats exacts, dans les limites de l'expérience, au delà de 5000^{m}.
2000 ...	2.36	2.48	— 0.12	$\frac{1}{17}$	
3000 ...	4.15	4.28	— 0.13	$< \frac{1}{20}$	
4000 ...	6.15	6.21	— 0. 6	$< \frac{1}{63}$	
5000 ...	8.41	8.28	+ 0.13	$< \frac{1}{38}$	
6000 ...	11.44	10.50	+ 0.54	$< \frac{1}{12}$	

Obus de 32^{cm}. — $v_0 = 454^{m},5$.

1000 ...	1.28	1.29	— 0. 1	$< \frac{1}{89}$	Résultats exacts, dans les limites de l'expérience, au delà de 4000^{m}.
2000 ...	3. 8	3.13	— 0. 5	$< \frac{1}{38}$	
3000 ...	5.13	5.12	+ 0. 1	$\frac{1}{412}$	
4000 ...	7.30	7.27	+ 0. 3	$\frac{1}{149}$	
5000 ...	11. 5	10	+ 1. 5	$< \frac{1}{9}$	

Obus de 27^{cm} *oblong.* — $v_0 = 505^m$.

Portée.	Angle donné par la théorie.	Angle donné par les Tables.	Erreur absolue.	Erreur relative.	Observation.
m	° ′	° ′	° ′		
1000 ...	1. 9	1.14	− 0. 5	$< \frac{1}{14}$	Exact, dans les limites de l'expérience jusque vers 6000^m.
2000 ...	2.33	2.42	− 0. 9	$\frac{1}{18}$	
3000 ...	4.15	4.26	− 0. 9	$< \frac{1}{29}$	
4000 ...	6.21	6.24	− 0. 3	$\frac{1}{128}$	
5000 ...	9. 6	8.43	+ 0.23	$< \frac{1}{32}$	
6000 ...	12.27	11.18	+ 1. 9	$\frac{1}{9}$	

Obus de 27^{cm} *ogival.* — $v_0 = 470^m$.

1000 ...	1.19	1.23	− 0. 4	$\frac{1}{21}$	Exact, dans les limites de l'expérience jusqu'à 5000^m.
2000 ...	2.52	3	− 0. 8	$< \frac{1}{22}$	
3000 ...	4.45	4.52	− 0. 7	$< \frac{1}{41}$	
4000 ...	7. 3	6.58	+ 0. 5	$< \frac{1}{83}$	
5000 ...	9.56	9.19	+ 0.37	$< \frac{1}{15}$	

Obus de 10^{cm}. — $v_0 = 485$.

1000 ...	1.27	1.29	− 0. 2	$\frac{1}{45}$	Exact jusque vers 2500^m.
2000 ...	3.36	3.31	+ 0. 5	$\frac{1}{42}$	
2500 ...	5. 8	4.46	+ 0.22	$\frac{1}{13}$	
3000 ...	7.16	6.10	+ 1. 6	$\frac{1}{5}$	

Obus de 24^{cm} *oblong. Modèle de la Marine.* — $v_0 = 470^m$.

1000 ...	1.20	1.24	− 0. 4	$\frac{1}{21}$
2000 ...	3. 4	3. 8	− 0. 4	$\frac{1}{47}$
3000 ...	5.16	5.11	+ 0. 5	$\frac{1}{62}$
4000 ...	8.14	7.34	+ 0.40	$< \frac{1}{11}$

Obus de 24^{cm} *oblong. Modèle de Bange.* — $v_0 = 470^m$.

1000 ...	1.21	1.27	− 0. 6	$< \frac{1}{25}$
2000 ...	3. 2	3. 6	− 0. 4	$< \frac{1}{46}$
3000 ...	5.13	4.57	+ 0.16	$\frac{1}{19}$
4000 ...	7.54	7. 2	+ 0.52	$\frac{1}{7}$

Il est rappelé que tous les angles calculés théoriquement ont été effectivement déduits de la théorie pure, sans aucun paramètre déduit d'expériences de tir, et que l'on avait prévu et démontré également que l'on trouverait aux grandes distances des valeurs trop fortes pour ces angles.

Du magnétisme statique;

PAR M. H. RESAL.

§ I. — PRÉLIMINAIRES.

1. Pour expliquer les propriétés magnétiques de certains corps [1], Coulomb considère les éléments matériels du corps comme renfermant en quantités égales et indéfinies deux fluides, l'un dit *boréal* ou *positif*, l'autre *austral* ou *négatif*.

En admettant que le corps soit soustrait à toute action capable de développer ses propriétés magnétiques, ces deux fluides se trouvent à l'état de combinaison ou se neutralisent dans la molécule matérielle correspondante. Mais, dès que le corps devient un aimant, les deux fluides se trouvent séparés, en quantités égales, et restent isolés pendant toute la durée de l'aimantation.

Par une extension donnée aux lois déduites de l'expérience par Coulomb, on est conduit à admettre que deux particules magnétiques se repoussent ou s'attirent proportionnellement à leurs masses, selon qu'elles sont ou non de même nature, et que leur action mutuelle varie en raison inverse du carré de leur distance.

Nous conviendrons de considérer une répulsion comme une force

[1] Les oxydes de fer et principalement l'oxydule, le fer, le nickel à la température de 20°.

positive et, par suite, d'attribuer une valeur négative à la masse d'une particule du fluide austral.

Un barreau d'acier trempé, convenablement orienté, devient au bout d'un certain temps, sous l'influence de la Terre, un aimant permanent, ce qui revient à dire que, lorsqu'il est soustrait à l'action magnétique, les deux fluides n'arrivent à se neutraliser que partiellement. Coulomb attribue cette opposition à la reconstitution du fluide neutre à une résistance passive à laquelle il a donné le nom de *force coercitive*, force sur la nature de laquelle on ne peut faire que des conjectures. Le barreau, dans certaines conditions, peut devenir un aimant permanent sous l'action d'un aimant permanent.

L'oxydule de fer est doué de la force coercitive et l'on attribue ses propriétés magnétiques à ce que les filons qui le renferment sont compris sensiblement dans les plans qui passent par les pôles magnétiques de la Terre.

Le fer doux et l'acier non trempé ne possèdent pas la propriété due à la force coercitive ; l'aimantation cesse en même temps que l'influence de l'aimant qui l'a produite. On considère un aimant comme étant formé de petites parties matérielles qui ont reçu le nom d'*éléments magnétiques* et dans lesquelles la séparation des fluides s'est opérée. En faisant le même raisonnement que pour l'électricité statique, on arrive à conclure que l'action magnétique sur un point intérieur de l'élément est nulle, et que, par suite, les deux fluides séparés se sont portés sur sa surface. La forme des éléments magnétiques peut d'ailleurs dépendre de la manière dont l'aimantation a été produite.

Coulomb admet que les deux fluides, après leur séparation, se sont respectivement concentrés en deux points ou *pôles* de la surface de l'élement. L'hypothèse d'Ampère, dans laquelle les éléments magnétiques sont remplacés par des solénoïdes infinitésimaux, revient, au point de vue de la mise en équation, à celle de Coulomb.

Poisson [1] n'a recours à aucune supposition sur le mode de répartition des deux fluides sur la surface de l'élément. Nous reconnaîtrons plus loin que, en se plaçant respectivement aux points de vue de Coulomb

---

[1] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1822.

et de Poisson, on arrive aux mêmes résultats en ce qui concerne l'action exercée par un aimant sur un point extérieur.

Dans son *Essai sur l'application de l'Analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme* [1], G. Green ne mentionne pas les recherches de Poisson sur le magnétisme. Qu'il les ait ou non ignorées, il est arrivé à la même équation que Poisson relativement à l'équilibre magnétique intérieur d'un aimant. L'analyse de Green est assez obscure et paraît avoir pour objet plutôt de déguiser que de faire disparaître une difficulté éludée par Poisson, à l'aide de considérations particulières qui ne sont pas des plus satisfaisantes.

L'exposition de la théorie du magnétisme de M. W. Thomson se trouvant implicitement comprise dans le premier Mémoire de Poisson, nous n'avons pas à nous y arrêter.

Nous ne nous occuperons pas d'ailleurs de l'étude des feuillets magnétiques, qui n'offre aucun intérêt au point de vue des phénomènes physiques; nous ne considérerons que des aimants doués de force coercitive [2].

§ II. — Équations générales.

2. *De l'action exercée par un aimant sur un point qui n'est pas compris dans la masse.* — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires; x, y, z les coordonnées de la particule magnétique M sur laquelle l'aimant exerce son action.

---

(1) Nottingham, 1828.

(2) Green paraît être le seul géomètre qui ait cherché à expliquer les effets de la force coercitive en se plaçant dans le cas d'un fil d'acier trempé, étudié expérimentalement par Coulomb.

Il est arrivé à une formule qui cadre, presque aussi bien que la formule d'interpolation de Biot, avec les résultats des observations de Coulomb.

Si nous ne reproduisons pas la théorie de Green, c'est par la raison qu'elle pèche par plusieurs points que nous allons faire ressortir. Il suppose que la force coercitive est constante et qu'elle se développe parallèlement à l'aiguille cylindrique dans un sens déterminé, ce qui nous paraît inadmissible; car cette force, devant changer de signe en passant d'une moitié à l'autre de l'aiguille, doit être nulle au milieu.

Par un artifice de calcul, justifié ultérieurement par une application ingénieuse

Pour simplifier, nous supposerons que la masse de cette particule est égale à l'unité, sauf à multiplier ultérieurement, s'il y a lieu, les résultats auxquels nous parviendrons par la valeur positive ou négative de la masse M. D'après cette convention, une particule magnétique m sera censée exercer sur M une répulsion ou une attraction, selon qu'elle appartiendra au fluide boréal ou au fluide austral.

Nous allons maintenant chercher à déduire successivement des conséquences des hypothèses de Coulomb et de Poisson sur la constitution d'un aimant.

(*a*) *D'après les idées de Coulomb.* — Soient (*fig.* 1)

Fig. 1.

a, b les pôles austral et boréal d'un élément magnétique de l'aimant (A);

ds sa longueur;

---

de la méthode des moindres carrés, il fait sortir d'une intégrale définie, fort embarrassante, le facteur inconnu qui se rapporte à l'action exercée sur un point déterminé de l'aimant.

Par un raisonnement insaisissable, il supprime deux termes importants de son équation fondamentale et s'impose deux conditions relatives aux extrémités de l'aiguille, qui consistent chacune en une équation dont le premier membre est la somme de deux fonctions homogènes qui ne sont pas du même degré, ce qui n'est pas non plus admissible.

Il paraîtrait assez naturel de supposer que la force coercitive en un point est proportionnelle à l'intensité magnétique en ce point; et alors l'équation de Green, débarrassée des deux termes dont on vient de parler et sans avoir égard aux conditions aux extrémités qu'il s'est imposées, conduit à la formule de Biot.

ν la valeur absolue de chacune des masses magnétiques condensées en a et b;

x', y', z' les coordonnées du point a;

$u' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$ la distance $\overline{Ma}$;

$u' + \frac{du'}{ds} ds$ la distance $\overline{Mb}$.

Les fonctions potentielles de M dues à a et b étant respectivement

$$\frac{\nu}{u'}, \quad -\nu\left(\frac{1}{u'} + \frac{d\frac{1}{u'}}{ds} ds\right),$$

celle à laquelle donne lieu l'élément a pour valeur

$$(a) \qquad -\nu \frac{d\frac{1}{u'}}{ds} ds.$$

On donne le nom d'*intensité magnétique linéaire de l'élément* à l'expression

$$(b) \qquad \mathrm{I}' = \nu \frac{ds}{dv'},$$

dans laquelle dv' représente le volume de l'élément.

Cette intensité pouvant être considérée comme une force dirigée du pôle austral a vers le pôle boréal b, nous désignerons par α', β', γ' ses composantes parallèles à Ox, Oy, Oz.

L'expression (a) prend la forme [1]

$$-\mathrm{I}' \frac{d\frac{1}{u'}}{ds} dv',$$

et nous avons, pour la fonction potentielle de M due à l'action totale

---

[1] En prenant la dérivée par rapport à x, on trouve pour la composante, paral-

de (A),

$$Q = -\int V dv' \frac{d\frac{1}{u}}{ds} = -\int V ds' \left(\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} \frac{dx'}{ds} + \frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} \frac{dy'}{ds} + \frac{d\frac{1}{u'}}{dz'} \frac{dz'}{ds} \right),$$

---

lèle à Ox, de l'action exercée par ab sur M,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi &= -V dv' \frac{d}{ds}\left(\frac{x'-x}{u'^3}\right) = -V \frac{dv'}{u'^3}\left[-3\frac{(x'-x)}{u'}\frac{du'}{ds} + \frac{dx'}{ds}\right] \\ &= -V \frac{dv'}{u'^3}\left[3\cos(u', ds)\cos(u', x) - \cos(ds, x)\right]. \end{aligned} \right.$$

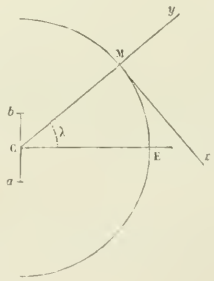
On a des expressions semblables pour les composantes η, ζ, suivant Oy, Oz, et l'on trouve facilement pour la résultante

$$V \frac{dv'}{u'^3}\left[3\cos^2(u', ds) + 1\right].$$

Pour se rendre compte du pouvoir magnétique de la Terre, Biot suppose qu'elle possède deux pôles magnétiques situés sur un même diamètre, à égale distance du centre, possédant les mêmes pouvoirs attractifs et répulsifs et dont la distance est très petite par rapport au rayon terrestre.

Supposons que a, b (*fig.* 2) soient les pôles magnétiques austral et boréal de

Fig. 2.



la Terre dont C est le centre, et que M soit l'un des pôles d'une aiguille aimantée placée à la surface du globe.

Prenons pour plan de la figure le méridien magnétique de M, c'est-à-dire le

ou

$$(c) \qquad Q = \int dv' \left(\alpha' \frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta' \frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma' \frac{d\frac{1}{u'}}{dz'} \right),$$

expression dans laquelle nous pouvons considérer maintenant x', y', z' comme étant les coordonnées du milieu C de ab.

Concevons autour de ce point un volume dv extrêmement petit par rapport au volume de A, mais cependant assez étendu pour contenir un grand nombre d'éléments magnétiques, et désignons par k' le rapport de la somme des volumes de ces éléments à dv. Ce rapport, qui atteindra au plus l'unité, sera spécifique pour un corps aimanté

---

plan déterminé par ce point et ab; pour partie positive de l'axe des y, le prolongement de CM, et pour axe des x la portion de la méridienne de M dirigée vers l'équateur. Soit λ la latitude magnétique de M ou le complément de l'angle formé par CM avec ab.

Nous avons, en considérant u' comme se rapportant au point C,

$$z = 0, \quad \cos(u', ds) = \sin\lambda, \quad \cos(u', x) = 0, \quad \cos(ds, x) = -\cos\lambda,$$
$$\cos(u', y) = 1, \quad \cos(ds, y) = \sin\lambda.$$

L'équation (α) et celle qui en dérive pour l'axe des y donnent, en ayant égard à la formule (b), pour les composantes de l'action exercée par la Terre sur M suivant Mx, My,

$$\chi = \frac{\nu\, ds}{u'^3} \cos\lambda, \qquad \tau_1 = \frac{2\, ds}{u'^3} \sin\lambda,$$

d'où

$$\frac{\tau_1}{\chi} = 2 \operatorname{tang}\lambda.$$

Pour le second pôle de l'aiguille, τ_1 et χ seront changés de signe. L'aiguille étant censée en équilibre, la ligne des pôles sera dirigée suivant la résultante de τ_1 et χ : si donc i désigne l'inclinaison magnétique au lieu considéré, nous aurons

$$\operatorname{tang} i = 2 \operatorname{tang}\lambda.$$

porté à une température uniforme déterminée, mais variera d'un point à un autre de ce corps si la température est elle-même variable, comme nous le supposerons pour plus de généralité, k' devenant ainsi une fonction donnée de x', y', z'. Quoique le volume dv soit censé extrêmement petit, les quantités α', β', γ', k' n'auront pas les mêmes valeurs dans toute son étendue, si les éléments magnétiques qu'il renferme n'ont pas tous la même forme, ou si, quoique identiques, ils ne sont pas régulièrement disposés. Nous les supposerons néanmoins constantes dans le volume considéré en leur attribuant des valeurs moyennes qui seront censées soumises à la loi de continuité et par suite exprimables en fonction de x', y', z'.

Nous pouvons dès lors supposer que, dans la formule (c), dv' représente la somme des volumes des éléments magnétiques contenus dans dv, et alors nous obtenons

$$Q = -\int k'\left(\alpha'\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta'\frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma'\frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right)dv,$$

et, comme l'intégrale doit être étendue au volume de (A), on est ramené à poser

$$(1)\qquad Q = -\int\int\int k'\left(\alpha'\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta'\frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma'\frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right)dx'\,dy'\,dz'.$$

(*b*). *D'après Poisson.* — Soient (*fig.* 3)

x', y', z' les coordonnées d'un point C situé dans l'intérieur d'un élément magnétique de (A);

c le côté du cube équivalent au volume de cet élément;

$x' + c\chi$, $y' + c\eta$, $z' + c\zeta$ les coordonnées d'un point m de la surface du même élément;

e, ρ l'épaisseur normale et la densité relative correspondante du fluide magnétique;

$e^2 ds$ un élément superficiel en m;

$u' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$ la distance MC.

Comme l'action de m sur M est une répulsion ou une attraction selon

Fig. 3.

que ρ est positif ou négatif, la fonction potentielle de M due à l'élément magnétique a pour expression

$$d \qquad -e^2 \int \rho e \frac{ds}{\mathrm{M}m},$$

l'intégrale s'étendant à la surface entière de l'élément.

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, comme il y a autant de fluide positif que de fluide négatif sur l'élément, on a

$$2 \qquad \int \rho e\, ds = 0.$$

En admettant que M soit suffisamment éloigné de C pour que l'on puisse négliger les puissances de $\frac{c\chi}{u}$, $\frac{c\eta}{u}$, $\frac{c\zeta}{u}$ d'un ordre supérieur au premier, nous avons

$$\frac{1}{\mathrm{M}m} = \frac{1}{u} + c\left(\frac{d\frac{1}{u}}{dx}\chi + \frac{d\frac{1}{u}}{dy}\eta + \frac{d\frac{1}{u}}{dz}\zeta\right).$$

Si nous posons

$$3 \qquad \alpha' = \int \chi e \rho\, ds, \quad \beta' = \int \eta e \rho\, ds, \quad \gamma' = \int \zeta e \rho\, ds,$$

et si nous avons égard à la relation (2), l'expression (d) devient

$$e \qquad -e^2\left(\alpha' \frac{d\frac{1}{u}}{dx} + \beta' \frac{d\frac{1}{u}}{dy} + \gamma' \frac{d\frac{1}{u}}{dz}\right).$$

Les valeurs (3) sont indépendantes de la position du point C dans l'intérieur de l'élément considéré : car, en passant d'une position à une autre, les coordonnées relatives χ, η, ζ ne varient que de quantités constantes qui, d'après la formule (2), donnent des résultats nuls.

Si nous représentons par dv' le volume c^3 de l'élément magnétique, on voit que la formule (c) nous conduira identiquement à l'expression (e) de la fonction potentielle de M due à (A) et enfin, à la suite d'un raisonnement qu'il est inutile de reproduire, à l'équation (1).

En considérant les quantités α', β', γ' comme définies par les formules (3) et se reportant à l'article précédent, on voit qu'un élément magnétique de (A) agira sur M de la même manière qu'une aiguille infinitésimale qu'on lui substituerait et qui ferait avec Ox, Oy, Oz des angles dont les cosinus seraient

$$\frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}},\quad \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}},\quad \frac{\gamma'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}.$$

D'après ce qui précède, il n'y a plus aucun motif pour préférer la manière de voir de Coulomb à celle de Poisson, qui sera seule en question dans ce qui suit, tout en conservant à la résultante de α', β', γ' le nom d'*intensité magnétique linéaire*.

Les composantes parallèles à Ox, Oy, Oz de l'action exercée par (A) sur M ont pour expressions, comme on le sait,

$$(4)\qquad X=\frac{dQ}{dx},\quad Y=\frac{dQ}{dy},\quad Z=\frac{dQ}{dz}.$$

5. *Autre forme sous laquelle on peut mettre la fonction* Q. — En intégrant par parties, l'équation (1) donne

$$Q=-\int\int\int\left(\frac{d\frac{\alpha' k'}{u'}}{dx'}+\frac{d\frac{\beta' k'}{u'}}{dy'}+\frac{d\frac{\gamma' k'}{u'}}{dz'}\right)\frac{dx'\,dy'\,dz'}{u'}$$
$$+\int\int\int\frac{1}{u}\left(\frac{d\alpha' k'}{dx'}+\frac{d\beta' k'}{dy'}+\frac{d\gamma' k'}{dz'}\right)dx'\,dy'\,dz'$$

ou, en vertu d'un théorème connu,

$$(5)\quad \begin{cases} Q=-\int(\alpha'\cos l'+\beta'\cos m'+\gamma'\cos n')\,k'\,\dfrac{d\omega'}{u'} \\ \qquad +\int\int\int\dfrac{1}{u}\left(\dfrac{d\alpha' k'}{dx'}+\dfrac{d\beta' k'}{dy'}+\dfrac{d\gamma' k'}{dz'}\right)dx'\,dy'\,dz', \end{cases}$$

en désignant par $d\omega'$ un élément de la surface de (A) au point M′ dont les coordonnées sont x', y', z' et par l', m', n' les angles formés par la normale extérieure à cet élément avec Ox, Oy, Oz.

On remarquera que le facteur de $k'\frac{d\omega'}{u'}$ dans la première intégrale n'est autre chose que la composante I'_n suivant la normale en M′ de l'intensité magnétique en ce point (n° 2).

De la formule précédente et de l'identité

$$\frac{d^2\frac{1}{u'}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dz^2} = 0,$$

on déduit l'équation connue

$$(6) \qquad \frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dz^2} = 0.$$

A l'inspection de l'équation (5), on reconnaît que l'aimant (A) agit sur M comme si la surface était recouverte d'un fluide dont la densité superficielle serait $I'_n k'$, et que les molécules renfermeraient un autre fluide dont la densité de masse aurait pour valeur

$$-\left(\frac{d\alpha' k'}{dx'} + \frac{d\beta' k'}{dy'} + \frac{d\gamma' k'}{dz'}\right).$$

4. *Action d'un corps aimanté sur un point intérieur de l'un de ses éléments magnétiques.* — Concevons une sphère (B) ayant son centre en M, dont le rayon est extrêmement petit par rapport aux dimensions de l'aimant, mais qui est censée assez étendue cependant pour renfermer un grand nombre d'éléments magnétiques.

Les composantes de l'action exercée sur M par la portion de (A) extérieure à (B) pourront se déterminer au moyen des formules (1) et (4), parce que le développement sur lequel elles reposent est ici parfaitement admissible. Mais il n'en est pas de même pour celles de (B) qui exigent un calcul spécial, puisque u' est de l'ordre de ds, $c\chi$, $c\eta$, $c\zeta$.

Occupons-nous d'abord de l'action exercée sur M par la portion

de (A) extérieure à (B); on peut supposer que Q s'étende au volume entier en retranchant ensuite de $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$, $\frac{dQ}{dz}$ les composantes X', Y', Z' dues à (B), estimées au moyen des formules (1) et (4).

Nous avons

$$X' = -\int\int\int\left(\alpha'\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'} + \beta'\frac{d}{dy}\frac{d\frac{1}{u'}}{dy'} + \gamma'\frac{d}{dz}\frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\right)k'\,dx'\,dy'\,dz'.$$

En raison des dimensions extrêmement petites du volume (B), on peut considérer α', β', γ', k' comme ayant les mêmes valeurs dans toute l'étendue de ce volume. Si donc nous désignons par α, β, γ, k celles de ces valeurs qui correspondent au point M, c'est-à-dire aux coordonnées x, y, z, nous aurons

$$\begin{aligned} X' = &-\alpha k\int\int\int\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dx'}\,dx'\,dy'\,dz' \\ &-\beta k\int\int\int\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dy'}\,dx'\,dy'\,dz' - \gamma k\int\int\int\frac{d}{dx}\frac{d\frac{1}{u'}}{dz'}\,dx'\,dy'\,dz' \end{aligned}$$

ou, en effectuant les différentiations par rapport à x,

$$\begin{aligned} X' = &-\alpha k\int\int\int\frac{d\frac{x'-x}{u'^3}}{dx'}\,dx'\,dy'\,dz' \\ &-\beta k\int\int\int\frac{d\frac{x'-x}{u'^3}}{dy'}\,dx'\,dy'\,dz' - \gamma k\int\int\int\frac{d\frac{x'-x}{u'^3}}{dz'}\,dx'\,dy'\,dz'. \end{aligned}$$

En étendant à la surface de (B) les notations admises pour celle de (A), cette expression peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X' = &-\alpha k\int\frac{(x'-x)}{u'^3}\cos l'\,d\omega' \\ &-\beta k\int\frac{(y'-y)}{u'^3}\cos m'\,d\omega' - \gamma k\int\frac{(z'-z)}{u'^3}\cos n'\,d\omega; \end{aligned}$$

et comme

$$x' - x = u' \cos l', \quad y' - y = u' \cos m', \quad z' - z = u' \cos n',$$

il vient

$$X' = -\alpha k \int \frac{(x' - x)^2}{u'^3} d\omega'$$
$$- \beta k \int \frac{(x' - x)(y' - y)}{u'^3} d\omega' - \gamma k \int \frac{(x' - x)(z' - z)}{u'^3} d\omega'.$$

Concevons, momentanément, que les axes coordonnés soient transportés parallèlement à eux-mêmes au point M pris pour origine; soient δ et ψ les angles formés par u' avec Mz et sa projection sur le plan xMy avec Mx; nous avons

$$x' - x = u' \sin\delta \cos\psi, \quad y' - y = u' \sin\delta \sin\psi, \quad z' - z = u' \cos\delta,$$
$$d\omega' = u'^2 \sin\delta \, d\delta \, d\psi$$

et

$$X' = -\alpha k \int\int \sin^3\delta \cos^2\psi \, d\delta \, d\psi - \beta k \int\int \sin^3\delta \sin\psi \cos\psi \, d\delta \, d\psi$$
$$- \gamma k \int\int \sin^2\delta \cos\delta \cos\psi \, d\delta \, d\psi,$$

les intégrales étant prises entre les limites $\delta = 0$, $\psi = 0$ et $\delta = \pi$, $\psi = 2\pi$. On tire de là

$$X' = -\frac{4}{3}\pi\alpha k,$$

et l'on trouverait de même

$$Y' = -\frac{4}{3}\pi\beta k, \quad Z' = -\frac{4}{3}\pi\gamma k.$$

Nous avons donc, pour les composantes de l'action sur M par la portion de l'aimant extérieur à (B),

$$(7) \quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{dQ}{dx} + \dfrac{4}{3}\pi\alpha k, \\ Y_1 = \dfrac{dQ}{dy} + \dfrac{4}{3}\pi\beta k, \\ Z_1 = \dfrac{dQ}{dz} + \dfrac{4}{3}\pi\gamma k. \end{cases}$$

Il nous reste maintenant à déterminer les composantes de l'action exercée par la sphère (B) sur le point M.

Concevons un cône ayant son sommet en ce point, d'une ouverture sphérique infiniment petite $d\sigma$ et terminé à la surface de (B). Une masse fluide élémentaire $\rho r^2 d\sigma dr$, comprise dans ce cône et située à la distance r du sommet, donnera lieu à l'action $\rho d\sigma dr$, et l'on aura $d\sigma \int \rho dr$ pour l'action du cône entier. L'action produite par le cône opposé sera de sens contraire à cette dernière et ces deux actions se détruiront au moins en partie. Comme les deux cônes ont la même longueur, ils traverseront à peu près le même nombre d'éléments magnétiques extérieurs à celui auquel M appartient, et la surface de chacun de ces éléments sera traversée deux fois. Quoique ces éléments ne soient pas nécessairement identiques, comme leur nombre est très grand et pour ainsi dire infini, il n'y a pas de raison de supposer qu'il y a plus de fluide libre d'un côté que de l'autre. Alors il ne restera de l'action des cônes que celle qui est due aux portions qu'ils déterminent dans la couche fluide de l'élément dans l'intérieur duquel M est situé. Il suit de ce raisonnement que, si ce point était extérieur à tout élément magnétique, il ne serait soumis à aucune action magnétique de la part de (B), c'est-à-dire qu'une particule magnétique de l'un ou l'autre fluide que l'on placerait au même point y resterait en équilibre si elle n'était influencée que par (B).

Supposons, pour un instant, que l'on ait transporté les axes Ox, Oy, Oz parallèlement à eux-mêmes au point M.

Soient θ et ψ les angles formés par r avec Mz et sa projection sur le plan xMy avec Mx; ε l'épaisseur de la couche magnétique déterminée par la direction de r; on peut prendre $d\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ et l'on reconnaît facilement que les composantes de l'action due à (B), parallèles à Ox, Oy, Oz, ont pour expressions

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= -\int\int \rho\varepsilon \sin^2\theta \cos\psi\, d\theta\, d\psi, \\ \beta_1 &= -\int\int \rho\varepsilon \sin^2\theta \sin\psi\, d\theta\, d\psi, \\ \gamma_1 &= -\int\int \rho\varepsilon \sin\theta \cos\theta\, d\psi. \end{aligned}\right.$$

les intégrales étant prises entre les limites $\theta = 0$, $\psi = 0$ et $\theta = \pi$, $\psi = 2\pi$. Nous rappellerons que nous avons désigné par α, β, γ les valeurs de α', β', γ' qui se rapportent aux point M.

En remontant au n° **2**, nous remarquerons que

$$ec^2 ds = \varepsilon r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

$$c\xi = r \sin\theta \cos\psi, \quad c\eta = r \sin\theta \sin\psi, \quad c\zeta = r \cos\theta;$$

d'où l'on déduit

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{c^3} \int\int \rho \varepsilon r^3 \sin^2\theta \cos\psi \, d\theta \, d\psi, \\ \beta &= \frac{1}{c^3} \int\int \rho \varepsilon r^3 \sin^2\theta \sin\psi \, d\theta \, d\psi, \\ \gamma &= \frac{1}{c^3} \int\int \rho \varepsilon r^3 \sin\theta \cos\theta \, d\psi. \end{aligned} \right.$$

Poisson a supposé que α, β, γ sont des fonctions linéaires de α_1, β_1, γ_1 dont les coefficients ne dépendent que de la forme de l'élément magnétique et de sa position par rapport aux trois plans coordonnés. Par des transformations de coordonnées et en exprimant que α, β, γ ne changent pas de valeur, si l'aimant (A), étant une sphère homogène, tourne sur lui-même, il arrive à conclure que six des coefficients de α_1, β_1, γ_1 sont nuls, que les trois autres sont égaux et que l'on peut ainsi poser

$$\alpha = -p\alpha_1, \quad \beta = -p\beta_1, \quad \gamma = -p\gamma_1,$$

p étant une fonction inconnue; il cherche à déterminer cette fonction par une savante analyse où il fait intervenir les fonctions sphériques; il arrive à un résultat approximatif tel, qu'il a dû supposer en chemin que l'élément magnétique était sensiblement sphérique. En effet, en substituant à cet élément une sphère moyenne de rayon r_1, ayant le même volume, nous aurons

$$c^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3,$$

et, en faisant $r = r_1$ dans les formules (9) et en ayant égard aux valeurs (8), on voit sans peine que l'on a

$$(10) \qquad \alpha_1 = -\frac{4}{3}\pi\alpha, \quad \beta_1 = -\frac{4}{3}\pi\beta, \quad \gamma_1 = -\frac{4}{3}\pi\gamma.$$

Telles sont les relations auxquelles Poisson est arrivé, quoique les raisonnements qui l'y ont conduit ne soient pas de la dernière rigueur [1].

Il résulte de ce qui précède que les composantes de l'action totale exercée par l'aimant (A) sur un point intérieur de l'un de ses éléments magnétique sont pour expressions

$$(11)\quad \begin{cases} X = \dfrac{dQ}{dx} - \dfrac{4}{3}\pi\alpha(1-k), \\ Y = \dfrac{dQ}{dy} - \dfrac{4}{3}\pi\beta(1-k), \\ Z = \dfrac{dQ}{dz} - \dfrac{4}{3}\pi\gamma(1-k). \end{cases}$$

5. *Équations d'équilibre des deux fluides contenus dans un corps aimanté.* — Supposons que les particules magnétiques de (A) soient soumises non seulement à leurs actions mutuelles, mais encore à celles d'aimants extérieurs. Désignons par V la fonction potentielle de M due à l'action de ces aimants.

Il faut que les forces magnétiques qui sollicitent le point M se fassent équilibre, car autrement il y aurait, en ce point, décomposition du fluide neutre, et l'équilibre magnétique dans (A) n'existerait pas, comme on l'a supposé; c'est pourquoi d'ailleurs on a admis, comme pour les fluides électriques, que le fluide magnétique était répandu sur la surface de chaque élément d'aimant.

On doit donc avoir, pour tous les points de l'intérieur de (A) ou quels que soient x, y, z,

$$X + \frac{dV}{dx} = 0, \quad Y + \frac{dV}{dy} = 0, \quad Z + \frac{dV}{dz} = 0,$$

---

[1] Il le reconnaît lui-même dans son Mémoire de 1828 intitulé : *Sur la théorie du magnétisme en mouvement* (*Mémoires de l'Institut*, p. 454), Mémoire que nous n'analyserions qu'en sortant du cadre que nous nous sommes tracé. Il nous paraît cependant que l'on pourrait éluder les difficultés en multipliant les expressions (10) par un coefficient, probablement peu différent de l'unité, mais qui ne pourrait être qu'une donnée expérimentale.

d'où, pour les équations cherchées,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dV}{dx} + \frac{dQ}{dx} - \frac{4}{3}\pi\alpha(1-k) = 0,\\ &\frac{dV}{dy} + \frac{dQ}{dy} - \frac{4}{3}\pi\beta(1-k) = 0,\\ &\frac{dV}{dz} + \frac{dQ}{dz} - \frac{4}{3}\pi\gamma(1-k) = 0. \end{aligned}\right.$$

On sait que, par sa nature, la fonction V satisfait à l'équation

$$(13)\quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0;$$

on a de plus

$$(f)\quad \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dz^2} = 0,$$

lorsque les différences $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ ne sont pas infiniment petites, et dans le cas contraire

$$(g)\quad \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dx^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dy^2} + \frac{d^2\frac{1}{u'}}{dz^2} = -4\pi.$$

Si l'on forme au moyen de l'équation (5) du n° **3** l'expression

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dz^2},$$

la somme des trois intégrales qui se rapportent à la surface de (A) est nulle; la somme des trois autres se réduit à celle qui est relative à une sphère d'un rayon infiniment petit enveloppant le point M et dans laquelle on peut supposer

$$\frac{d\alpha' k'}{dx'} = \frac{d\alpha k}{dx},\quad \frac{d\beta' k'}{dy'} = \frac{d\beta k}{dy},\quad \frac{d\gamma' k'}{dz'} = \frac{d\gamma k}{dz};$$

on obtient ainsi, eu égard à la relation (f),

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dz^2} = -4\pi\left(\frac{d\alpha k}{dx} + \frac{d\beta k}{dy} + \frac{d\gamma k}{dz}\right).$$

Si donc on ajoute entre elles les équations (12), après les avoir différentiées respectivement par rapport à x, y, z, on trouve

$$(14)\qquad 2\left(\frac{d\alpha k}{dx}+\frac{d\beta k}{dy}+\frac{d\gamma k}{dz}\right)+\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0.$$

6. *Cas où la température de l'aimant est uniforme.* — Nous ne considérerons dorénavant que le cas dans lequel k est une constante (n° **2**).

L'équation précédente se réduit alors à la suivante :

$$(15)\qquad \frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0.$$

A l'inspection des équations (12), on reconnaît que α, β, γ sont les dérivées partielles, par rapport à x, y, z, d'une même fonction que nous désignerons par f. Nous aurons ainsi

$$(16)\qquad \alpha=\frac{df}{dx},\quad \beta=\frac{df}{dy},\quad \gamma=\frac{df}{dz},$$

et, au lieu de l'équation (15),

$$(17)\qquad \frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{d^2f}{dz^2}=0.$$

Les équations (12) se réduisent alors à la suivante :

$$(18)\qquad V+Q-\frac{4\pi}{3}(1-k)f=0\ \text{(}^1\text{)},$$

d'où on les déduira par la différentiation relative aux trois coordonnées.

En vertu de l'équation (15) et en supposant k' ou k constant, la seconde intégrale de l'expression (5), (n° **3**) est nulle et l'on a sim-

(1) Cette équation n'est autre chose que celle qui a été reproduite par Green et à laquelle nous avons fait allusion au n° **1**.

plement

$$(19)\qquad Q = -k\int\left(\frac{df'}{dx'}\cos l' + \frac{df'}{dy'}\cos m' + \frac{df'}{dz'}\cos n'\right)\frac{d\omega'}{u'},$$

en désignant par f' ce que devient f quand on y remplace x, y, z par x', y', z'. La couche fictive superficielle dont nous avons parlé à la fin du n° **3** est donc tout ce qu'il reste de l'action exercée par (A) sur M.

Portons sur la normale extérieure au point M′ de la surface de (A) une longueur infiniment petite $M'M'_1 = dw'$, et soient $x' + dx'$, $y' + dy'$, $z' + dz'$ les coordonnées de M'_1; comme on a

$$\cos l' = \frac{dx'}{dw'},\quad \cos m' = \frac{dy'}{dw'},\quad \cos n' = \frac{dz'}{dw'},$$

l'expression (19) se met alors sous la forme simple

$$(19')\qquad Q = -k\int\frac{df'}{dw'}\frac{d\omega'}{u'},$$

Comme les équations d'après lesquelles Q s'est réduit à l'expression (19) n'ont pas lieu pour les éléments magnétiques situés sur la surface de (A), ou qui en sont à une distance insensible, les valeurs de $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$, $\frac{dQ}{dz}$ ne comprendront pas l'action de ces éléments; mais on peut, sans erreur appréciable, négliger cette action ou la regarder comme insensible par rapport à celle de tous les éléments dont (A) est composé.

7. *Le volume renferme un vide à l'intérieur.* — On calculera d'abord Q comme si le volume était plein, et de l'expression obtenue on retranchera celle qui est relative au volume du vide intérieur considéré comme plein.

Supposons que les éléments qui entrent dans les formules (19) et (19′) se rapportent à la surface extérieure; augmentons d'un accent les éléments correspondants qui sont relatifs à un point M″ de la surface intérieure. Nous aurons

$$(20)\qquad Q = -k\int\frac{df'}{dw'}\frac{d\omega'}{u'} + k\int\frac{df''}{dw''}\frac{d\omega''}{u''},$$

la première de ces intégrales s'étendant à la surface extérieure et la seconde à la surface intérieure.

Supposons que la fonction V se rapporte aux aimants extérieurs à (A) et que U soit son équivalent pour les aimants qui pourraient se trouver dans le vide : à l'équation (18) on devra substituer la suivante :

$$V + U + Q - \frac{4\pi}{3}(1 - k)f = 0, \tag{21}$$

dans laquelle Q sera remplacé par sa valeur (20).

Plaçons l'origine O des coordonnées dans l'intérieur du vide, et soient r, le rayon vecteur OM; θ l'angle $\widehat{MOz}$; ψ l'angle formé avec Ox par la projection de r sur le plan yOx; affectons d'un accent et de deux accents les quantités analogues qui se rapportent aux points M′ et M″ de la surface extérieure et de la surface intérieure. Soient, de plus ϖ', ϖ'' des angles qui forment avec r', r'' les normales en M′, M″; E′, E″ les épaisseurs suivant les directions de r', r'' des couches fluides fictives répandues sur les surfaces extérieure et intérieure. Nous avons

$$\left\{\begin{aligned} u^2 &= r^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi')] + r'^2, \\ u'^2 &= r^2 - 2rr''[\cos\theta\cos\theta'' + \sin\theta\sin\theta''\cos(\psi - \psi'')] + r''^2, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} d\omega'\cos\varpi' &= r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi', \\ d\omega''\cos\varpi'' &= r''^2\sin\theta''\,d\theta''\,d\psi'', \end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$\left\{\begin{aligned} k\frac{df'}{dv'} &= E'\cos\varpi', \\ k\frac{df''}{dv''} &= E''\cos\varpi''. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Les formules (20) et (21) deviennent alors

$$Q = -\int\int\frac{1}{u'}E'r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi' - \int\int\frac{1}{u''}E''r''^2\sin\theta''\,d\theta''\,d\psi'', \tag{25}$$

$$\left\{\begin{aligned} V + U\frac{4}{3}\pi(1 - k)f = &-\int\int\frac{1}{u'}E'r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi' \\ &+\int\int\frac{1}{u''}E''r''^2\sin\theta''\,d\theta''\,d\psi''. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

les intégrales étant prises entre $\theta' = 0$, $\theta'' = 0$, $\psi' = 0$, $\psi'' = 0$ et $\theta' = \pi$, $\theta'' = \pi$, $\psi' = 2\pi$, $\psi'' = 2\pi$.

On sait d'ailleurs que, en substituant les coordonnés polaires aux coordonnés rectilignes, l'équation (17) se transforme dans la suivante :

$$(27)\qquad \frac{r\,d^2 rf}{dr^2} + \frac{d\left(\sin\theta\,\dfrac{df}{d\theta}\right)}{\sin\theta\,d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{df^2}{d\psi^2} = 0.$$

8. *Indications générales sur la marche à suivre pour arriver à l'intégration.* — Posons

$$(28)\qquad f = \sum_{i=0} \mathrm{R}_i,$$

R_i étant une fonction rationnelle entière du degré i, de $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\psi$, $\sin\theta\cos\psi$, dépendante de r, qui satisfait à l'équation

$$(29)\qquad \frac{d\sin\theta\,\dfrac{d\mathrm{R}_i}{d\theta}}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{d^2\mathrm{R}_i}{d\psi^2} + i(i+1)\,\mathrm{R}_i = 0.$$

En remplaçant f par R_i dans l'équation (27) et ayant égard à la précédente, on trouve

$$r\,\frac{d^2 r\mathrm{R}_i}{dr^2} - i(i+1)\,\mathrm{R}_i = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\mathrm{R}_i = \mathrm{H}_i r^i + \frac{\mathrm{G}_i}{r^{i+1}},$$

H_i, G_i étant des *fonctions* sphériques du degré i en θ et ψ, indépendantes de r, qui satisfont à l'équation (29) quand on les substitue à R_i. L'équation (27) sera donc satisfaite par

$$(30)\qquad f = \sum\left(\mathrm{H}_i r^i + \frac{\mathrm{G}_i}{r^{i+1}}\right).$$

Cela posé, on substituera à f cette valeur dans l'équation (26), ainsi que les expressions de u, u', V, U exprimées en séries convergentes ordon-

nées, selon les cas, suivant les puissances ascendantes ou descendantes de r, et l'on égalera à zéro la somme des coefficients des mêmes puissances de r. On déterminera ainsi les H_i, G_i, par suite f, puis α, β, γ, et enfin les composantes de l'action magnétique du corps au moyen de la quantité Q dont la valeur se déduira de celle de f par des intégrations immédiates.

§ III. — Application aux corps sphériques.

9. *Équilibre magnétique intérieur d'une enveloppe sphérique.* — Considérons une sphère creuse dont les rayons extérieur et intérieur soient a, b, et plaçons l'origine des coordonnées au centre O de cette sphère.

On a

$$dw' = dr', \quad dw'' = dr'';$$

par suite,

$$E' = k\frac{df'}{dr'}, \quad E'' = k\frac{df''}{dr''},$$

expressions dans lesquelles on devra faire $r' = a$, $r'' = b$, après avoir effectué les différentiations.

Si nous distinguons par un accent et deux accents les valeurs que prennent H_i et G_i lorsque l'on y remplace θ, ψ par θ', ψ' et par θ'', ψ'', nous aurons, en vertu de l'équation (30) du n° **8**,

$$(1)\quad \begin{cases} E' = k\sum\left[iH'_i a^{i-1} - (i+1)\dfrac{G'_i}{a^{i+2}}\right], \\ E'' = k\sum\left[iH''_i b^{i-1} - (i+1)\dfrac{G''_i}{b^{i+2}}\right]. \end{cases}$$

L'équation (26) du n° **7** prend alors la forme suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} V + U - \dfrac{4\pi}{3}(1-k)\sum\left(H_i r_i + \dfrac{G_i}{r^{i+1}}\right) \\ \quad - ka^2\displaystyle\int\int\frac{1}{u}\sum\left[iH'_i a^{i-1} - (i+1)\frac{G'_i}{a^{i+2}}\right]\sin\theta' d\theta' d\psi' \\ \quad + kb^2\displaystyle\int\int\frac{1}{u}\sum\left[iH''_i b^{i-1} - (i+1)\frac{G''_i}{b^{i+2}}\right]\sin\theta'' d\theta'' d\psi'' = 0. \end{cases}$$

Comme on a $r < a$, $r > b$, $\frac{1}{u}$ ne pourra être développé en série convergente que suivant les puissances ascendantes de r, et $\frac{1}{u'}$ que suivant les puissances descendantes de la même variable. Nous poserons en conséquence (1)

$$(3)\qquad \frac{1}{u} = \sum \frac{Y_i' r^i}{a^{i+1}}, \quad \frac{1}{u'} = \sum \frac{Y_i'' b^i}{r^{i+1}},$$

les coefficients Y_0', Y_0'' étant égaux à l'unité. La fonction Y_i' est symétrique en ς, ς' et ψ, ψ' et satisfera, substituée à R_i, à l'équation (29), en remplaçant toutefois θ par ς' et ψ par ψ'. On sait d'ailleurs que l'on a, en intégrant entre les limites $\varsigma' = 0$, $\psi' = 0$ et $\varsigma' = \pi$, $\psi' = 2\pi$,

$$\int\int H_i' Y_i' \sin\varsigma' d\varsigma' d\psi' = 0 \quad \text{pour } i' \geqq i,$$

$$\int\int H_i' Y_i' \sin\varsigma' d\varsigma' d\psi' = \frac{4\pi H_i}{2i+1},$$

équations dans lesquelles H_i peut être remplacé par G_i.

Tout ce que nous venons de dire s'applique à Y'', H'', G'' en remplaçant ς', ς' par ς'', ς''.

Il résulte de là que, en substituant les séries (3) dans l'équation (2), cette dernière devient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} & V + U - \frac{4}{3}\pi(1-k)\sum\left[H_i r^i + \frac{G_i}{r^{i+1}}\right] \\ & - 4\pi k \sum \frac{i H_i r^i}{2i+1} + 4\pi k \sum \frac{(i+1) G_i r^i}{a^{2i+1}} \\ & + 4\pi k \sum \frac{i b^{2i-1}}{2i+1}\frac{H_i}{r^{i+1}} - 4\pi k \sum \frac{(i+1)}{2i+1}\frac{G_i}{r^{i+1}} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remarque que les fonctions V et U correspondent à des centres de forces dont les distances au point O sont plus grandes que r pour la première et plus petites pour la seconde, ces fonctions seront respec-

tivement développables suivant les puissances ascendantes et descendantes de r et nous pourrons écrire

$$(5)\quad \begin{cases} V = \sum V_i r_i, \\ U = \sum \frac{U_i}{r^{i+1}}, \end{cases}$$

V_i et U_i étant des fonctions sphériques du même ordre que H_i, G_i.

A mesure que r augmentera, U tendra à se réduire à son premier terme, mais, à la limite, cette fonction sera égale à la somme des quantités de fluide libre appartenant aux aimants intérieurs divisée par r et, comme cette somme est nécessairement nulle, on a $U_0 = 0$.

Portant les valeurs (5) dans l'équation (4) et égalant à zéro les coefficients de r^i, $\frac{1}{r^{i+1}}$, on trouve

$$(6)\quad \begin{cases} V_i - \frac{4\pi}{3}(1-k)H_i - 4\pi k \frac{i}{2i+1} H_i + 4\pi k \frac{i+1}{(2i+1)a^{2i+1}} G_i = 0, \\ U_i - \frac{4\pi}{3}(1-k)G_i + 4\pi k \frac{ib^{2i+1}}{2i+1} H_i - 4\pi k \frac{(i+1)}{2i+1} G_i = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduira les valeurs de H_i, G_i qu'il s'agissait de déterminer. De ce que $U_0 = 0$, la seconde des équations précédentes donne $G_0 = 0$ et on tire de la première

$$(7)\quad V_0 - \frac{4\pi}{3}(1-k)H_0 = 0.$$

En remarquant que l'unité est une fonction sphérique de l'ordre 0, les formules (1) donnent pour les quantités totales de fluide libre fictives répandues sur les surfaces extérieure et intérieure de l'enveloppe

$$a^2 \int\int E' \sin\delta' \, d\delta' \, d\psi' = -4\pi G_0,$$

$$b^2 \int\int E'' \sin\delta'' \, d\delta'' \, d\psi'' = -4\pi G_0,$$

et sont ainsi nulles puisque $G_0 = 0$.

10 *Action de l'enveloppe sur un point donné extérieur ou intérieur.* — Soient F la fonction dont les dérivées changées de signe par rapport à x, y, z donnent les composantes suivant Ox, Oy, Oz de l'action exercée sur le point M.

Cette fonction ne sera autre chose que le premier membre de l'équation (2) dans lequel on supprimera le terme en $(1-k)$ qui caractérise un point d'un élément magnétique de l'enveloppe et par conséquent on aura

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} F = V + U &- ka^2 \int\int \frac{1}{u'} \sum \left[iH_i a^{i-1} - (i+1)\frac{G'_i}{a^{i+2}} \right] \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' \\ &+ kb^2 \int\int \frac{1}{u''} \sum \left[iH''_i b^{i-1} - (i+1)\frac{G''_i}{b^{i+2}} \right] \sin\theta'' \, d\theta'' \, d\psi''. \end{aligned}\right.$$

1° *Le point* M *est extérieur.* Comme $r > a > b$, nous pourrons écrire, comme plus haut,

$$\frac{1}{u''} = \sum Y''_i \frac{b^i}{r^{i+1}}, \quad U = \sum \frac{U_i}{r^{i+1}}.$$

On reconnaît facilement que le coefficient du terme en $\frac{1}{r^{i+1}}$ de F fournit par U et u'' n'est autre chose que le premier membre de la seconde des équations (6) dont on aurait supprimé le second terme; ce coefficient est donc égal à $\frac{4\pi}{3}(1-k)G_i$; nous avons donc déjà

$$\begin{aligned} F = V &+ \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum \frac{G_i}{r^{i+1}} \\ &- ka^2 \int\int \frac{1}{u'} \sum \left[iH_i a^{i-1} - (i+1)\frac{G'_i}{a^{i+2}} \right] \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'. \end{aligned}$$

Mais nous devons poser aussi

$$\frac{1}{u'} = \sum \frac{Y'_i a^i}{r^{i+1}},$$

Y'_i ayant la même valeur qu'au numéro précédent. Il vient donc

$$F = V + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum \frac{G_i}{r^{i+1}} + 4\pi k \sum \frac{1}{r^{i+1}} \left[\frac{iH_i}{2i+1} a^{2i+1} - \frac{(i+1)}{2i+1} G_i \right].$$

Au moyen de la première des équations (6), cette expression se réduit facilement à la suivante :

$$(9)\qquad F = V - \sum \frac{a^{2i+1} V_i}{r^{i+1}} + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum \frac{a^{2i+1}(H_i + G_i)}{r^{i+1}}.$$

2° *Le point* M *est intérieur à l'enveloppe ou* $r < b < a$. — On devra prendre

$$\frac{1}{u'} = \sum \frac{V_i r^i}{a^{i+1}}, \quad V = \sum V_i r^i,$$

comme au n° 8. Le terme en r^i fourni par le premier et le troisième terme de F ne sera alors autre chose que le premier membre de la première des équations (6) dans lequel on aurait supprimé le terme en $(1-k)$; nous avons donc déjà

$$F = U + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum H_i r^i$$
$$+ kb^2 \int\int \frac{1}{u'}\left[H_i - i\,b^{i-1} - \frac{i+1}{b^{i+2}} G_i''\right] \sin\theta'' d\theta'' d\Phi''$$

Comme ici nous devons prendre

$$\frac{1}{u'} = \sum \frac{V_i r^i}{b^{i+1}},$$

il vient

$$F = U + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum H_i r^i + 4\pi k \sum r^i \left[\frac{H_i}{2i+1} - \frac{G_i}{(2i+1)b^{2i+1}}\right],$$

ou, en ayant égard à la seconde des équations (6),

$$(10)\qquad F = U - \sum \frac{U_i r_i}{b^{2i+1}} + \frac{4\pi}{3}(1-k)\sum r^i \left[H_i + \frac{G_i}{b^{2i+1}}\right],$$

11. *Examen de quelques cas particuliers.* — 1° $k = 1$. Cette hypothèse se réalise à très peu près pour le fer doux. Les équations (9) et (10) se réduisent aux suivantes :

$$(9')\qquad F = V - \sum \frac{a^{2i+1} V_i}{r^{i+1}},$$

$$(10')\qquad F = U - \sum \frac{U_i r^i}{b^{2i+1}}.$$

D'ou cette double proposition : *L'action exercée sur le point* M *est indépendante des masses magnétiques intérieures s'il est intérieur et des masses magnétiques extérieures s'il est intérieur.*

2° *La sphère est pleine.* Nous avons $U = 0$, $b = 0$, par suite $G_i = 0$ d'après la seconde des équations (6); la première de ces équations donne

$$(6'') \qquad H_i = \frac{V_i}{4\pi\left[\frac{(1-k)}{3} + \frac{ki}{2i+1}\right]}$$

et l'équation (9)

$$(9'') \qquad F = V - \sum \frac{a^{2i+1}V^i}{r^{i+1}}\left(1 - \frac{1}{1-k+3ki}\right).$$

3° *L'enveloppe sphérique n'est soumise qu'à une action extérieure constante en grandeur et en direction.* Supposons, pour fixer les idées, que cette action est celle qui est produite par la terre. Nous dirigerons la partie positive de l'axe Oz vers le pôle boréal terrestre, et nous ferons passer par M le plan zOx qui, étant un plan de symétrie, renfermera l'intensité magnétique. Nous poserons

$$V = -mz = -mr\cos\theta, \quad U = 0, \quad \beta = 0,$$

m étant une constante qui sera positive pour notre hémisphère.

Nous aurons ainsi

$$V_0 = 0, \quad V_1 = -m\cos\theta \quad \text{et} \quad V_i = 0 \text{ pour } i > 2$$

et, en vertu des équations (6),

$$H_i = 0, \quad G_i = 0 \text{ pour } i > 1, \quad H_0 = 0,$$

en nous rappelant que $G_0 = 0$.

De ces mêmes équations on déduit

$$(6''') \qquad \begin{cases} H_1 = A(1+k)\cos\theta, \\ G_1 = Akb^3\cos\theta, \end{cases}$$

en posant

$$(11)\qquad A = \frac{3ma^3}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^3b^3]}.$$

De la formule (30) du n° 8 on déduit alors

$$f = A r\cos\theta\left(1 + k + k\frac{b^3}{r^3}\right).$$

Désignons par $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}$ les composantes suivant le rayon et la méridienne de l'intensité magnétique au point M (n° 2), dont les projections sur Ox, Oy, Oz sont respectivement

$$\alpha = \frac{df}{dx},\quad \beta = \frac{df}{dy},\quad \gamma = \frac{df}{dz}.$$

Nous avons

$$(11')\qquad \begin{cases} \mathfrak{R} = \dfrac{df}{dr} = \quad A\cos\theta\left(1 + k - 2k\dfrac{b^3}{r^3}\right). \\ \mathfrak{M} = \dfrac{df}{r\,d\theta} = -A\sin\theta\left(1 + k + k\dfrac{b^3}{r^3}\right). \end{cases}$$

et l'on voit ainsi que l'intensité magnétique en chacun des points de (A) est parallèle à la direction du magnétisme terrestre. Des formules (11), on déduit

$$\alpha = \mathfrak{R}\sin\theta + \mathfrak{M}\cos\theta = -3Ak\frac{b^3}{r^3}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\gamma = \mathfrak{R}\cos\theta - \mathfrak{M}\sin\theta = A\left[1 + k + k\frac{b^3}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta)\right].$$

En se rapportant à la formule (9) et ayant égard aux valeurs ci-dessus de V_1, H_1, G_1, A, on trouve, pour la fonction potentielle d'un point M extérieur à l'enveloppe,

$$(12)\qquad F = m\cos\theta\left(-r + B\frac{a^3}{r^2}\right),$$

en posant

$$(13)\qquad B = k\frac{(k+1)(a^3 - b^3)}{(1+k)a^3 - 2k^2b^3}.$$

On déduit de là pour les composantes de l'action exercée sur M, estimées suivant le rayon et la méridienne,

$$(14)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}_1 = -m\cos\theta\left(1 + 2B\dfrac{a^3}{r^3}\right), \\ \mathfrak{M}_1 = -m\sin\theta\left(-1 + B\dfrac{a^3}{r^3}\right). \end{cases}$$

Ainsi donc l'action dont il s'agit est parallèle à la direction du magnétisme terrestre.

Des formules précédentes on déduit aussi

$$\frac{dF}{dx} = \mathfrak{R}_1 \sin\theta + \mathfrak{M}_1 \cos\theta = -mB\frac{a^3}{r^3}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\frac{dF}{dz} = \mathfrak{R}\cos\theta - \mathfrak{M}_1 \sin\theta = -m\left[1 - B\frac{a^3}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta)\right],$$

ou encore

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = -mB\dfrac{a^3}{r^5}xz, \\ \dfrac{dF}{dz} = -m\left[1 - B\dfrac{a^3}{r^3}\left(1 - \dfrac{3z^2}{r^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Si la sphère est pleine ou si $b = 0$, on a simplement

$$(15')\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = -mk\dfrac{a^3}{r^5}xz, \\ \dfrac{dF}{dz} = -m\left[1 - k\dfrac{a^3}{r^3}\left(1 - \dfrac{3z^2}{r^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Il est évident que, si les axes Ox et Oy sont orientés d'une manière quelconque, on doit substituer à ces formules les suivantes :

$$(15'')\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = -mk\dfrac{a^3}{r^5}xz, \\ \dfrac{dF}{dy} = -mk\dfrac{a^3}{r^5}yz, \\ \dfrac{dF}{dz} = -m\left[1 - k\dfrac{a^3}{r^3}\left(1 - \dfrac{3z^2}{r^2}\right)\right]. \end{cases}$$

§ IV. — Application des formules générales a l'ellipsoide.

12. *Expression de la fonction potentielle* Q. — Rappelons-nous les formules suivantes du n° 6 :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = 0, \tag{1}$$

$$Q = -k \int \left(\frac{df'}{dx'} \cos l' + \frac{df'}{dy'} \cos m' + \frac{df'}{dz'} \cos n' \right) \frac{d\omega}{u'}. \tag{2}$$

Soient

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 \tag{3}$$

l'équation de l'ellipsoïde donné (A) ;

ϖ' l'angle formé par la normale au point (x', y', z') avec le rayon vecteur $OM' = r'$ mené en ce point ;

$d\sigma$ l'ouverture sphérique du cône ayant son sommet et pour base l'élément $d\omega'$ de la surface de (A).

En posant

$$\Delta = \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}},$$

nous avons

$$\cos l' = \frac{1}{\Delta} \frac{x'}{a^2}, \quad \cos m' = \frac{1}{\Delta} \frac{y'}{b^2}, \quad \cos n' = \frac{1}{\Delta} \frac{z}{c^2},$$

$$\cos \varpi' = \frac{x'}{r'} \cos l' + \frac{y'}{r'} \cos m' + \frac{z'}{r'} \cos n' = \frac{1}{r'\Delta},$$

$$d\omega' = r'^2 \frac{d\sigma}{\cos \varpi'} = \Delta r'^3 d\sigma.$$

Par suite,

$$Q = -k \int \left(\frac{df'}{dx'} \frac{x'}{a^2} + \frac{df'}{dy'} \frac{y'}{b^2} + \frac{df'}{dz'} \frac{z'}{c^2} \right) r' \frac{r'^2 d\sigma}{u'}. \tag{2'}$$

Nous supposerons que l'ellipsoïde n'est soumis qu'à une action extérieure constante en grandeur et en direction, ce qui revient à poser

$$V = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z, \tag{4}$$

en désignant par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ trois constantes données. Nous allons chercher à satisfaire aux conditions d'équilibre magnétique intérieur de l'ellipsoïde en posant

$$(5) \qquad f = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

α, β, γ étant des coefficients inconnus.

Nous rappellerons (nos 5 et 6) que $\alpha = \frac{df}{dx}$, $\beta = \frac{df}{dy}$, $\gamma = \frac{df}{dz}$ doivent être considérés comme des infiniment petits.

La formule (2′) devient

$$(2'') \qquad Q = -k\int\left(\frac{\alpha x'}{a^2} + \frac{\beta y'}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}\right) r' \frac{r'^2 d\sigma}{a'}.$$

Considérons un second ellipsoïde (A′) obtenu en transportant (A) parallèlement à lui-même, de manière que son centre vienne coïncider avec le point dont les coordonnées parallèles à Ox, Oy, Oz sont respectivement α, β, γ. En désignant par x'', y'', z'' les coordonnées d'un point quelconque M″ de la surface de (A′) et par r'' le rayon OM″ de ce point, nous avons

$$\frac{(x''-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y''-\beta)^2}{b^2} + \frac{(z''-\gamma)^2}{c^2} = 1,$$

ou, en ne conservant que les premières puissances de α, β, γ,

$$\frac{x''^2 - 2\alpha x''}{a^2} + \frac{y''^2 - 2\beta y''}{b^2} + \frac{z''^2 - 2\gamma z''}{c^2} = 1.$$

Si l'on fait coïncider la direction de OM″ avec celle de OM′, on a

$$x'' = \frac{r''}{r'}x', \quad y'' = \frac{r''}{r'}y', \quad z'' = \frac{r''}{r'}z'$$

et par suite, en ayant égard à l'équation (3),

$$\left(\frac{\alpha x'}{a^2} + \frac{\beta y'}{b^2} + \frac{\gamma z'}{c^2}\right) r' = \frac{r''^2 - r'^2}{2r'} = r'' - r'.$$

Nous avons donc

$$Q = k\int (r' - r'')\frac{r'^2 d\sigma}{u'}.$$

Cette expression n'est autre chose, au facteur k près, que la fonction potentielle de M qui serait due à l'attraction du volume de la couche limitée par (A) et (A') ou la différence des potentiels qui se rapportent à ces deux volumes. On sait que les composantes suivant Ox, Oy, Oz de l'attraction exercée par (A) sur un point (x, y, z), qu'il soit extérieur ou intérieur, sont de la forme

$$-Nx, \quad -N'y, \quad -N''z,$$

N, N', N'' étant des coefficients positifs qui ne dépendent que de a, b, c. Les composantes semblables relatives à (A') seront

$$N(x-\alpha), \quad -N'(y-\beta), \quad N''(z-\gamma);$$

d'où, pour les différences,

$$-N\alpha, \quad -N'\beta, \quad -N''\gamma,$$

nous aurons donc

$$(6) \qquad \frac{dQ}{dx} = -Nk\alpha, \quad \frac{dQ}{dy} = -N'k\beta, \quad \frac{dQ}{dz} = -N''k\gamma,$$

par suite

$$(7) \qquad Q = -k(N\alpha x + N'\beta y + N''\gamma z).$$

15. *Rappel des formules relatives à l'attraction exercée par le volume d'un ellipsoïde sur un point* (x, y, z). — Supposons que $2c$ soit le plus petit des trois axes et posons

$$\frac{a^2-c^2}{c^2} = \lambda^2, \quad \frac{b^2-c^2}{c^2} = \lambda'^2.$$

Considérons d'abord le cas où le point attiré est intérieur et désignons par c_1 le demi-axe parallèle à Oz de l'ellipsoïde homofocal du

proposé passant par ce point. Nous avons, pour déterminer c_1, l'équation

$$(8)\qquad \frac{z^2}{c_1^2} + \frac{y^2}{c_1^2 + b^2 - c^2} + \frac{x^2}{c_1^2 + a^2 - c^2} = 1,$$

qui n'admet qu'une racine positive pour c_1^2; les deux autres racines se rapportent aux hyperboloïdes homofocaux.

Nous avons maintenant [1], u étant une variable auxiliaire,

$$(9)\qquad L = \int_0^{\frac{c}{c_1}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)},$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} N &= \frac{4\pi ab}{c^2}\frac{dL}{d\lambda},\\ N' &= \frac{4\pi ab}{c^2}\frac{dL}{d\lambda'},\\ N'' &= \frac{4\pi ab}{c^2}L. \end{aligned}\right.$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (9) u par $\frac{c}{c_1}u$ et posons

$$\lambda_1^2 = \frac{a^2-c^2}{c_1^2} = \lambda^2\frac{c^2}{c_1^2},\qquad \lambda_1'^2 = \frac{b^2-c^2}{c_1^2} = \lambda'^2\frac{c^2}{c_1^2},$$

$$(11)\qquad L_1 = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda_1^2u^2)^{\frac12}(1+\lambda_1'^2u^2)^{\frac12}}.$$

Nous aurons

$$L = \frac{c^3}{c_1^3}L_1,$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{dL_1}{d\lambda_1} = \frac{c^3}{c_1^3}\frac{dL_1}{d\lambda_1^2},\qquad \frac{dL}{d\lambda'} = \frac{c^3}{c_1^3}\frac{dL_1}{d\lambda_1'}.$$

---

(1) *Voir* notamment les formules des p. 151-152 de notre *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, en y remplaçant m par l'unité, M par $\frac{4}{3}\pi abc$, L par $\frac{4}{3}\pi abc\,L$, c par c_1 et enfin λ par λ', et *vice versa*.

Par suite

$$(12)\quad \begin{cases} N = \dfrac{4\pi abc}{c_1^3}\dfrac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}, \\ N' = \dfrac{4\pi abc}{c_1^3}\dfrac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}, \\ N'' = \dfrac{4\pi abc}{c_1^3} L_1. \end{cases}$$

Les formules (11) et (12) s'appliqueront au cas où le point attiré se trouve sur la surface de l'ellipsoïde, en y supposant $c_1 = c$ ou $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda'_1 = \lambda'$, et alors nous avons

$$(11')\quad L = \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$(12')\quad \begin{cases} N = \dfrac{4\pi ab}{c^2}\dfrac{d\lambda L}{d\lambda}, \\ N' = \dfrac{4\pi ab}{c^2}\dfrac{d\lambda' L}{d\lambda'}, \\ N'' = \dfrac{4\pi ab}{c^2} L. \end{cases}$$

Si le point est intérieur, l'attraction se réduira à celle de l'ellipsoïde déterminé par la surface semblable à celle du précédent passant par ce point; mais, comme pour les deux ellipsoïdes les rapports $\frac{ab}{c^2}$, λ, λ' ont les mêmes valeurs, les formules (11') et (12') s'appliqueront encore au cas considéré.

On voit ainsi que l'on peut se borner à considérer les formules (11) et (12) en convenant d'y faire $c_1 = c$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda'_1 = \lambda'$ si le point attiré est situé sur la surface de l'ellipsoïde ou dans son intérieur.

Cas particulier. — On a

$$\frac{dL_1}{d\lambda_1} = -\int_0^1 \frac{\lambda_1 u^2 du}{(1+\lambda_1^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2_1 u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'ellipsoïde est de révolution autour de Oz, ou si $a = b$ ou $\lambda_1 = \lambda'_1$, il

vient

$$\frac{d\mathrm{L}_1}{d\lambda_1} = -\int_0^1 \frac{\lambda_1 u^2 du}{(1+\lambda_1^2 u^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda_1}\int_0^1 \frac{u^2 du}{1+\lambda_1^2 u^2},$$

$$\mathrm{L}_1 = \int_0^1 \frac{u^2 du}{1+\lambda_1^2 u^2} = \frac{1}{\lambda_1^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1\right).$$

Au moyen de ces deux expressions il est facile de former celle de $\frac{d\lambda_1 \mathrm{L}_1}{d\lambda_1}$ et l'on a par suite

$$(13)\quad \begin{cases} \mathrm{N} = \mathrm{N}' = \dfrac{4\pi a^2 c}{c_1^3}\dfrac{1}{2\lambda_1^2}\left(\dfrac{1}{\lambda_1}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1 - \dfrac{1}{1+\lambda_1^2}\right), \\ \mathrm{N}'' = \dfrac{4\pi a^2 c}{c_1^3}\dfrac{1}{\lambda_1^2}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda_1}\operatorname{arc\,tang}\lambda_1\right). \end{cases}$$

14. *Équilibre magnétique intérieur de l'ellipsoïde.* — Des équations (12) du n° 5, en ayant égard aux valeurs (4) et (6), on déduit

$$\mathfrak{A} = \alpha\left[\frac{4\pi}{3}(1-k) + \mathrm{N}k\right],$$

$$\mathfrak{B} = \beta\left[\frac{4\pi}{3}(1-k) + \mathrm{N}'k\right],$$

$$\mathfrak{C} = \gamma\left[\frac{4\pi}{3}(1-k) + \mathrm{N}''k\right],$$

ou, en vertu des formules (12'),

$$(14)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = 4\pi\alpha\left(\dfrac{1-k}{3} + k\dfrac{ab}{c^2}\dfrac{d\lambda\mathrm{L}}{d\lambda}\right), \\ \mathfrak{B} = 4\pi\beta\left(\dfrac{1-k}{3} + k\dfrac{ab}{c^2}\dfrac{d\lambda'\mathrm{L}}{d\lambda'}\right), \\ \mathfrak{C} = 4\pi\gamma\left(\dfrac{1-k}{3} + k\dfrac{ab}{c^2}\mathrm{L}\right); \end{cases}$$

on déduira de là α, β, γ et l'on voit par suite que la forme (5) attribuée à la fonction f satisfait bien aux conditions du problème.

15. *Action de l'ellipsoïde sur un point extérieur.* — Soient X, Y, Z les composantes de cette force suivant Ox, Oy, Oz. Nous avons, en ayant

égard à la valeur (4),

$$(15)\quad \begin{cases} X = \mathfrak{X} + \dfrac{dQ}{dx}, \\ Y = \mathfrak{Y} + \dfrac{dQ}{dy}, \\ Z = \mathfrak{Z} + \dfrac{dQ}{dz}. \end{cases}$$

En se reportant au n° **16**, l'action de l'ellipsoïde (A) sur le point M a pour composantes, suivant Ox, Oy, Oz,

$$-4\pi\frac{abc}{c_1^3}x\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1},\quad -4\pi\frac{abc}{c_1^3}y\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1},\quad -4\pi\frac{abc}{c_1^3}z L_1,$$

en ne perdant pas de vue que c_1, λ_1, λ_1 sont des fonctions de x, y, z.

Les composantes semblables de l'attraction exercée par l'ellipsoïde (A') s'obtiendront en remplaçant dans les expressions précédentes x, y, z respectivement par $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$; mais, comme α, β, γ sont traités comme des infiniment petits, on voit que le résultat sera le même que si l'on ajoutait aux expressions ci-dessus leurs différentielles totales, en y remplaçant dx, dy, dz par $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$.

En prenant la différence entre les actions exercées par (A) et (A'), nous aurons

$$\frac{dQ}{dx} = -4\pi kabc\left(\alpha\frac{d\frac{x}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dx} + \beta\frac{d\frac{x}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dy} + \gamma\frac{d\frac{x}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dz}\right),$$

$$\frac{dQ}{dy} = -4\pi kabc\left(\alpha\frac{d\frac{y}{c_1^3}\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dx} + \beta\frac{d\frac{y}{c_1^3}\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dy} + \gamma\frac{d\frac{y}{c_1^3}\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dz}\right),$$

$$\frac{dQ}{dz} = -4\pi kabc\left(\alpha\frac{d\frac{z L_1}{c_1^3}}{dx} + \beta\frac{d\frac{z L_1}{c_1^3}}{dy} + \gamma\frac{d\frac{z L_1}{c_1^3}}{dz}\right).$$

Si l'on ajoute entre elles ces valeurs multipliées respectivement par dx, dy, dz, on trouve, pour le coefficient de $-4\pi kabc\alpha$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{c_1^3}\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}dx + y\frac{d\lambda'_1 L_1}{c_1^3 d\lambda'_1}dy + z\frac{L_1}{c_1^3}dz\right).$$

Cette expression n'étant autre chose que celle d'un potentiel, la quantité entre crochets est nécessairement une différentielle exacte de x, y, z et l'on doit avoir par suite

$$\frac{dx\,\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dy} = \frac{dy\,\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dx}, \quad \frac{dx\,\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1}}{dz} = \frac{dz\,L_1}{dx}, \quad \frac{dy\,\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1}}{dz} = \frac{dz\,L_1}{dy},$$

Il suit de là que l'on a

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -4\pi kabc\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha x}{c_1^3}\,\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \frac{\beta y}{c_1^3}\,\frac{d\lambda'_1 L^2}{d\lambda'_1} + \frac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right),\\ \frac{dQ}{dy} &= -4\pi kabc\,\frac{d}{dy}\left(\frac{\alpha x}{c_1^3}\,\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \frac{\beta y}{c_1^3}\,\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1} + \frac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right),\\ \frac{dQ}{dz} &= -4\pi kabc\,\frac{d}{dz}\left(\frac{\alpha x}{c_1^3}\,\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \frac{\beta y}{c_1^3}\,\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda'_1} + \frac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right),\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(17)\quad Q = -4\pi abc\left(\frac{\alpha x}{c_1^3}\,\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} + \frac{\beta y}{c_1^3}\,\frac{d\lambda'_1 L'_1}{d\lambda'_1} + \frac{\gamma z L_1}{c_1^3}\right).$$

Au moyen des valeurs (16) les formules (14) feront connaître les composantes cherchées.

16. *Vérification dans le cas de la sphère.* — On a $a = b = c$, $\lambda_1 = c$, $\lambda_1 = 0$, $L_1 = \frac{1}{3}$. Les formules (12) donnent

$$\frac{4\pi\alpha}{3} = \mathfrak{A}, \quad \frac{4\pi\beta}{3} = \mathfrak{B}, \quad \frac{4\pi\gamma}{3} = \mathfrak{C},$$

et l'équation (17) devient

$$(18)\quad Q = -k\frac{a^3}{r^3}(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z).$$

Si l'on fait coïncider l'axe des z avec la direction de la force extérieure qui sera, si l'on veut, l'action $-m$ du globe terrestre, et si l'on fait passer le plan zOx par le point M, on a

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = -m, \quad y = 0,$$

puis

$$Q = mk\frac{a^3}{r^3}z;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dQ}{dx} = -3mk\frac{a^3}{r^5}xz,$$

$$\frac{dQ}{dz} = mk\frac{a^3}{r^3}\left(1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right).$$

En ajoutant la force extérieure $-m$ à la seconde de ces formules, on retombe sur les formules (15') du n° **11**.

17. *Cas d'un ellipsoïde de révolution aplati.* — Nous avons $a = b$, $\lambda_1 = \lambda_1$; les équations (13) et (14) donnent, en faisant $\lambda_1 = \lambda = \frac{a-c}{c}$,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= 4\pi\alpha\left[\frac{1-k}{3} + \frac{k}{2}\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{\lambda}\text{arc tang}\,\lambda - \frac{1}{1+\lambda^2}\right)\right],\\ \mathfrak{B} &= 4\pi\beta\left[\frac{1-k}{3} + \frac{k}{2}\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{\lambda}\text{arc tang}\,\lambda - \frac{1}{1+\lambda^2}\right)\right],\\ \mathfrak{C} &= 4\pi\gamma\left[\frac{1-k}{3} + k\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\text{arc tang}\,\lambda\right)\right], \end{aligned}\right.$$

d'où α, β, γ.

En ce qui concerne l'action de l'ellipsoïde sur un point extérieur, on a, en portant les valeurs (13) dans la formule (17),

$$(20)\quad Q = -4\pi k\frac{a^2c}{c_1(a^2-c^2)}\left[\frac{1}{2}(\alpha x + \beta y)\left(\frac{1}{\lambda_1}\text{arc tang}\,\lambda_1 - \frac{1}{1-\lambda_1^2}\right) + \gamma z\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\text{arc tang}\,\lambda_1\right)\right].$$

En faisant $a = b$ et désignant par r la distance du point M au centre O, la formule (8) donne

$$(21)\quad c_1^2 = \frac{1}{2}(r^2 - a^2 + c^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(r^2 - a^2 + c^2)^2 + 4(a^2 - c^2)z^2},$$

en y joignant la relation

$$(22)\qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On pourra ainsi former les valeurs de $\frac{dQ}{dx}, \frac{dQ}{dy}, \frac{dQ}{dz}$, et par suite trouver les composantes X, Y, Z de l'action cherchée.

18. *L'ellipsoïde de révolution est très aplati.* — Supposons que le rapport $\frac{c}{a}$ soit assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré; nous obtiendrons une sorte de plaque circulaire dont l'épaisseur décroîtra en allant du centre à la circonférence; on a

$$\lambda \frac{c}{a} = 1, \quad \text{arc tang}\,\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{c}{a},$$

et les équations (19) deviennent

$$(19') \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi\alpha &= \frac{3\mathfrak{A}}{1 - k + \frac{3\pi}{4} k \frac{c}{a} - 3k \frac{c^2}{a^2}}, \\ 4\pi\beta &= \frac{3\mathfrak{B}}{1 - k + \frac{3\pi}{4} k \frac{c}{a} - 3k \frac{c^2}{a^2}}, \\ 4\pi\gamma &= \frac{3\mathfrak{C}}{1 - k + \frac{3\pi}{2} k \frac{c}{a}}. \end{aligned} \right.$$

On a conservé le terme en $\frac{c^2}{a^2}$ en dénominateur des deux premières de ces expressions, en raison de ce que, en général, $1 - k$ est une très petite fraction.

La formule (20) donne ensuite

$$(20') \quad \left\{ \begin{aligned} Q = &- \frac{3kc(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y)}{2\left(1 - k + \frac{3\pi}{4}\frac{kc}{a} - 3k\frac{c^2}{a^2}\right)}\left(\frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{a}{c_1} - \frac{c_1}{a^2 + c_1^2}\right) \\ &- \frac{3kc\mathfrak{C}z}{1 + 2k - \frac{3\pi}{2}\frac{k^2}{a}}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{a}{c_1}\right). \end{aligned} \right.$$

Admettons maintenant que le point M soit assez peu éloigné du centre de la plaque pour que l'on puisse négliger les carrés de $\frac{z^2}{a^2}, \frac{r^2}{a^2}$. L'équa-

tion (21) donne

$$c_1 = \pm z\left(1 + \frac{r^2 - z^2}{2a^2}\right), \tag{21'}$$

en prenant le signe + ou le signe — selon que z est positif ou négatif. On a d'ailleurs

$$\text{arc tang}\,\frac{a}{c_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{c_1}{a} + \frac{c^3}{3a^3},$$

et l'expression (20') se réduit à

$$\begin{aligned} Q = &- \frac{3kc(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y)}{2\left(1 - k + \frac{3\pi}{2}\frac{kc}{a} - 3k\frac{c^2}{a^2}\right)}\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{2z}{a}\right) \\ &- \frac{3rc\mathfrak{C}z}{1+2k}\left(\pm\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{\pi z}{2a} \pm \frac{z^2}{a^2}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -\frac{3k\pi\mathfrak{A}c}{4a\left(1 - k + \frac{3\pi kc}{4a} - \frac{3kc^3}{a^2}\right)} \pm \frac{3kc\mathfrak{A}z}{\left(1 - k + \frac{3\pi kc}{4a}\right)a^2}, \\ \frac{dQ}{dy} &= -\frac{3\pi kc\mathfrak{B}}{4a\left(1 - k + \frac{3\pi kc}{4a} - \frac{3kc^2}{a^2}\right)} \pm \frac{3kc\mathfrak{B}z}{\left(1 - k + \frac{3\pi kc}{4a}\right)a^2}, \\ \frac{dQ}{dz} &= -\frac{3\pi kc\mathfrak{C}}{2(1+2k)a} \pm \frac{3kc(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y)}{\left(1 - k + \frac{3\pi kc}{4a}\right)a^2}. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

De ces formules on déduit ce qui suit :

Supposons que la différence $1 - k$ soit assez petite pour être négligée. Les équations (15) et (22) donneront, pour les composantes de l'action exercée sur M,

$$X = \frac{4c\mathfrak{A}}{\pi a} \mp \frac{4\mathfrak{A}z}{\pi a},$$

$$Y = \frac{4c\mathfrak{B}}{\pi a} \mp \frac{4\mathfrak{B}z}{\pi a},$$

$$Z = -\mathfrak{C} - \frac{\pi c\mathfrak{C}}{2a} - \frac{4(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y)}{\pi a}.$$

On voit ainsi que l'action de la plaque détruit en presque totalité la

composante de la force extérieure parallèle au plan moyen de cette plaque, tandis que la composante normale à ce plan n'a pas été sensiblement modifiée, à la condition toutefois que la composante dont il s'agit ne soit pas très petite ou que la force extérieure ne soit pas trop inclinée sur la plaque; de sorte qu'une aiguille aimantée suspendue librement par son centre prendrait une direction sensiblement normale à la plaque.

En supposant que la force extérieure soit due au magnétisme terrestre, Poisson a considéré, comme application de sa formule, les cas où la plaque est horizontale et où elle est parallèle à l'axe des pôles magnétiques. Les conséquences auxquelles il arrive ne sont pas de nature à trouver place dans cette analyse.

19. *Cas d'un ellipsoïde allongé.* — Soit $b = c$; on a

$$\lambda'_1 = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$L_1 = \frac{\sqrt{1+\lambda_1^2}}{2\lambda_1^2} - \frac{1}{2\lambda_1^3}\log\left(\lambda_1 + \sqrt{1+\lambda_1^2}\right),$$

$$\frac{d\lambda_1 L_1}{d\lambda_1} = -\frac{1}{\lambda_1^2\sqrt{1+\lambda_1^2}} + \frac{1}{\lambda_1^3}\log\left(\lambda_1 + \sqrt{1+\lambda_1^2}\right),$$

$$\frac{d\lambda'_1 L_1}{d\lambda'_1} = L_1,$$

et, pour déterminer c_1,

$$y^2 + z^2 + \frac{c_1^2 x^2}{c_1^2 + a^2 - c^2} = c_1^2,$$

d'où

$$c_1^2 = \tfrac{1}{2}(r^2 - a^2 + c^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(r^2 - a^2 + c^2)^2 + 4(a^2 - c^2)(y^2 + z^2)}.$$

On n'a plus maintenant qu'à faire des substitutions dans les équations (14) et (17) pour obtenir la solution du problème.

20. *L'ellipsoïde est très allongé.* Supposons que $\frac{c}{a}$ soit assez petit pour que l'on puisse en négliger le carré; l'ellipsoïde deviendra une

sorte d'aiguille (A) ayant pour longueur $2a$ et dont c serait le rayon en son milieu. On a

$$\lambda_1 c_1 = a,$$

$$(24)\quad \begin{cases} 4\pi\alpha = \dfrac{3\mathfrak{A}}{1 - k + 3k\dfrac{c^2}{a^2}\left(\log\dfrac{2a}{c} - 1\right)}, \\[2ex] 4\pi\beta = \dfrac{3\mathfrak{B}}{1 + \dfrac{k}{2}}, \\[2ex] 4\pi\gamma = \dfrac{3\mathfrak{C}}{1 + \dfrac{k}{2}}, \end{cases}$$

$$Q = -\frac{3kc^2(\mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z)}{\left(1 + \dfrac{k}{2}\right)c_1^2} - \frac{3kc^2\mathfrak{A}x\left(\log\dfrac{2a}{c_1} - 1\right)}{(1 - k)a^2 + 3kc^2\left(\log\dfrac{2a}{c} - 1\right)}.$$

Admettons maintenant que la distance du point M au milieu de l'aiguille soit assez petite pour que l'on puisse négliger le carré de $\frac{r}{a}$, et, par suite, celui de $\frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{a}$; alors on a

$$c_1 = \sqrt{y^2 + z^2},$$

et, en posant

$$(25)\quad k' = \frac{3kc^2}{(1 - k)a^2 + 3kc^2\left(\log\dfrac{2a}{c} - 1\right)},$$

on trouve

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} = -k'\mathfrak{A}\left(\log\dfrac{2a}{\sqrt{y^2 + z^2}} - 1\right), \\[2ex] \dfrac{dQ}{dy} = \dfrac{3kc^2[\mathfrak{B}(y^2 - z^2) + 2\mathfrak{C}yz]}{\left(1 + \dfrac{k}{2}\right)(y^2 + z^2)} + k'\dfrac{\mathfrak{A}xy}{y^2 + z^2}, \\[2ex] \dfrac{dQ}{dz} = \dfrac{3kc^2[\mathfrak{C}(z^2 - y^2) + 2\mathfrak{B}yz]}{\left(1 + \dfrac{k}{2}\right)(y^2 + z^2)} + k'\dfrac{\mathfrak{A}xz}{y^2 + z^2}. \end{cases}$$

On déduit de ces formules les conséquences suivantes, en supposant que la force extérieure soit due à l'action magnétique terrestre.

1° *L'aiguille* (A) *est perpendiculaire au plan du méridien magnétique.* — On a $\mathfrak{A} = 0$ et, de plus, $\mathfrak{B} = 0$ en prenant la partie positive de l'axe des z dirigée vers le pôle boréal; la quantité $\mathfrak{C}$ sera négative ou positive selon que la particule magnétique placée en M sera boréale ou australe.

Désignant par u la distance du point M à l'axe de l'aiguille et par ν l'angle qu'elle fait avec l'axe Oz, on a

$$y = u \sin\nu, \quad z = u \cos\nu,$$

et, en posant

$$\frac{3k}{1 + \frac{k}{2}} = 2g,$$

on trouve

$$\frac{dQ}{dx} = 0,$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{2gc^2\mathfrak{C}\sin 2\nu}{u^2},$$

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{2gc^2\mathfrak{C}\cos 2\nu}{u^2};$$

puis on a

$$X = 0,$$

$$Y = -\frac{2gc^2\mathfrak{C}\sin 2\nu}{u^2},$$

$$Z = -\mathfrak{C} - \frac{2gc^2\mathfrak{C}\cos 2\nu}{u^2}.$$

Si le point M appartient à une aiguille aimantée (C), suspendue librement par son centre de gravité, très courte relativement à la distance u de son milieu au point O, cette aiguille restera dans le plan du méridien magnétique, mais l'influence de l'aiguille ellipsoïdale (A) modifiera son inclinaison. En appelant ε l'angle que la partie de l'aiguille (C) qui aboutit au pôle boréal fera avec sa direction naturelle,

on aura

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{Y}{Z} = \frac{2gc^2 \sin 2\nu}{u^2 + 2gc^2 \cos 2\nu}.$$

Il y aura un cas où l'aiguille (C) ne prendra plus de direction déterminée, c'est lorsque l'on aura en même temps $Y = 0$, $Z = 0$, ou

$$\nu = \frac{\pi}{2}, \quad u = c\sqrt{2g}.$$

2° *L'aiguille* (A) *est parallèle à l'action magnétique terrestre.* — On a $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ et, si la partie positive de Ox est dirigée vers le pôle magnétique boréal, la quantité $\mathfrak{A}$ sera positive ou négative selon que la particule située en M sera boréale ou australe.

En continuant à désigner par u la distance du point M à Ox, et par ν l'angle qu'elle fait avec Oz, on a

$$X = -\mathfrak{A} + k'\mathfrak{A}\left(\log\frac{2a}{u} - 1\right),$$

$$Y = -\frac{k'\mathfrak{A}'x\sin\nu}{u},$$

$$Z = -\frac{k'\mathfrak{A}x\cos\nu}{u}.$$

La résultante des forces Y et Z est dirigée suivant la distance de M à l'axe de l'aiguille et varie en raison inverse du carré de cette distance.

Si donc le point M appartient à une aiguille aimantée (C) librement suspendue par son centre de gravité, la projection de cette aiguille sur un plan perpendiculaire à l'axe de (A) sera normale à cette droite, et l'on voit, d'après les signes de $\mathfrak{A}$ et de x, que ce sera la projection de son pôle boréal ou celle de son pôle austral qui tombera du côté de (A), selon que le plan perpendiculaire en O à Ox passera au-dessous ou au-dessus du milieu de (C), ou selon que x sera positif ou négatif. Si l'on désigne par ε' l'inclinaison sur Ox de l'aiguille (C) dont la lon-

gueur est censée très petite par rapport à u, on a

$$\operatorname{tang}\varepsilon' = -\frac{\sqrt{Y^2+Z^2}}{X} = \frac{k'x}{u\left(1+k'-k'\log\frac{2a}{u}\right)}.$$

Supposons maintenant que l'aiguille (C) soit assujettie à rester horizontale; soient $O\chi$ la projection horizontale de Ox; i l'inclinaison magnétique $\widehat{xO\chi}$; nous prendrons pour axe des y la perpendiculaire en O au plan des $xO\chi$; soit, de plus, δ l'angle formé par (C) avec sa direction naturelle $O\chi$. Les forces X et Z donnent suivant $O\chi$ la composante

$$X\cos i + Z\sin i;$$

on a, par suite,

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{Y}{X\cos i + Z\sin i} = \frac{k'x\sin\nu}{k'x\cos\nu\sin i + u\left(1+k'-k'\log\frac{2a}{u}\right)\cos i}.$$

Telle est la formule qu'il s'agissait d'établir.

§ V. — Actions simultanées de plusieurs sphères aimantées par l'influence de la terre sur un point qui leur est extérieur.

21. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les centres des n sphères.

Nous rappellerons (n° **19**) que pour chaque sphère les coordonnées du point extérieur M sont rapportées à trois axes rectangulaires menés par le centre de cette sphère. Nous supposerons tous les systèmes d'axes parallèles entre eux, de manière que les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ du magnétisme terrestre suivant leurs trois directions soient les mêmes quand on passera d'une sphère à une autre.

Nous distinguerons par l'indice i les quantités k, a, r, x, y, z, Q qui se rapportent à la sphère dont le centre est C_i.

Les composantes de l'action totale exercée par les sphères sur le point M sont

$$X = \sum\frac{dQ_i}{dx_i},\quad Y = \sum\frac{dQ_i}{dy_i},\quad Z = \sum\frac{dQ_i}{dz_i}$$

ou, en vertu de la formule (19) du n° **19**,

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
X &= -\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathfrak{A}\left(1-\frac{3x_i^2}{r_i^2}\right)-\frac{3x_i}{r_i^2}(\mathfrak{B}y_i+\mathfrak{C}z_i)\right],\\
Y &= -\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathfrak{B}\left(1-\frac{3y_i^2}{r_i^2}\right)-\frac{3y_i}{r_i^2}(\mathfrak{A}x_i+\mathfrak{C}z_i)\right],\\
Z &= -\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathfrak{C}\left(1-\frac{3z_i^2}{r_i^2}\right)-\frac{3z_i}{r_i^2}(\mathfrak{A}x_i+\mathfrak{B}y_i)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

25. Cherchons à voir si le système de sphères ne peut pas être combiné de manière qu'il n'exerce aucune action sur le point M, quand même le magnétisme terrestre viendrait à éprouver un changement en grandeur et en direction. Nous avons, en égalant à zéro les coefficients de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ des expressions précédentes,

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left(1-\frac{3x_i^2}{r_i^2}\right)=0,\\
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left(1-\frac{3y_i^2}{r_i^2}\right)=0,\\
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^2}\left(1-\frac{3z_i^2}{r_i^2}\right)=0;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i y_i = 0,\\
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3} x_i z_i = 0,\\
&\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3} y_i z_i = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

La somme [1] des équations (2) étant identiquement nulles, on voit que l'on n'a à satisfaire qu'à cinq conditions.

---

[1] Par une singulière inadvertance, Poisson a écrit ainsi cette somme

$$\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3},$$

et, comme elle ne peut pas être nulle, il avait conclu de là que les actions des sphères ne pouvaient pas s'entre-déduire pour toutes les directions du magnétisme terrestre.

22. Déterminons maintenant les conditions que doit remplir le système de sphères pour qu'il n'ait aucune influence sur la direction de l'aiguille de déclinaison, quelle que soit celle du magnétisme terrestre. Nous placerons l'origine des coordonnées au milieu O de l'aiguille en prenant le plan horizontal pour celui des xy.

Nous poserons en conséquence

$$\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{Y}} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}};$$

d'où, en vertu des deux premières des équations (1),

$$\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\left(1 - \frac{3x_i^2}{r_i^2}\right) - \frac{3x_i}{r_i^2}(\mathfrak{B}^2 y_i + \mathfrak{B}\mathfrak{C} z_i)\right]$$
$$-\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^3}\left[\mathfrak{B}\mathfrak{A}\left(1 - \frac{3y_i^2}{r_i^2}\right) - \frac{3y_i}{r_i^2}(\mathfrak{A}^2 x_i + \mathfrak{A}\mathfrak{C} z_i)\right] = 0.$$

On déduit de là, en égalant à zéro les coefficients de $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5}(x_i^2 - y_i^2) = 0,\\ &\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i y_i = 0,\\ &\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i z_i = 0,\\ &\sum k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} y_i z_i = 0.\end{aligned}\right.$$

23. Considérons d'abord le cas de deux sphères; nous avons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5}(x_1^2 - y_1^2) &= -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^5}(x_2^2 - y_2^2),\\ k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} x_1 y_1 &= -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^5} x_2 y_2,\\ k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} x_1 z_1 &= -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^5} x_2 z_2,\\ k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} x_1 z_1 &= -k_2 \frac{a_2^3}{r_2^5} y_2 z_2.\end{aligned}\right.$$

En multipliant terme à terme les deux dernières de ces équations et supprimant le facteur commun qui résulte de la considération de la seconde, on trouve

$$k_1 \frac{a_1^3 z_1^2}{r_1^5} + k_2 \frac{a_2^3 z_2^2}{r_2^5} = 0,$$

ce qui exige que l'on ait $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, ou que *les centres des sphères soient situés dans le plan horizontal.*

Soient φ_1, φ_2 les angles que forment r_1, r_2 avec Ox. Nous avons

$$x_1 = r_1 \cos\varphi_1, \quad y_1 = r_1 \sin\varphi_1, \quad x_2 = r_2 \cos\varphi_2, \quad y_2 = r_2 \sin\varphi_2,$$

et les deux premières des équations (5) deviennent

$$k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \cos 2\varphi_1 = - k_2 \frac{a_2^3}{r_2^3} \cos 2\varphi_2,$$

$$k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \sin 2\varphi_1 = - k_2 \frac{a_1^3}{r_2^3} \sin 2\varphi_2;$$

d'où successivement

$$\operatorname{tang} 2\varphi_1 = \operatorname{tang} 2\varphi_2,$$

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \pm \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{k_1 a_1^3}{r_1^3} = \dfrac{k_2 a_2^3}{r_2^3}. \end{cases}$$

Ainsi *les rayons vecteurs des deux sphères doivent être perpendiculaires entre eux et, si les sphères sont de même nature, proportionnels aux rayons des sphères.*

27. Revenons au cas général où le système est composé d'un nombre quelconque de sphères. Faisons sortir des sommes des équations (4) les éléments qui se rapportent à la sphère (C_1), et considé-

rons comme données les quantités

$$(7)\quad \begin{cases} \sum_2^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5}(x_i^2 - y_i^2) = \mathrm{A}, \\ \sum_2^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i y_i = \mathrm{B}, \\ \sum_2^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} x_i r_i = \mathrm{C}, \\ \sum_2^n k_i \frac{a_i^3}{r_i^5} y_i z_i = \mathrm{D}, \end{cases}$$

sauf à établir ultérieurement les conditions que doivent remplir les constantes pour que le problème soit susceptible d'une solution. En posant, comme plus haut,

$$x_i = r_1 \cos\varphi_1, \quad y_1 = r_1 \sin\varphi_1,$$

les équations précitées deviennent

$$(8)\quad \begin{cases} k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \cos 2\varphi_1 = -\mathrm{A}, \\ k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} \sin 2\varphi_1 = -2\mathrm{B}, \\ k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} z_1 \cos\varphi_1 = -\mathrm{C}, \\ k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} z_1 \sin\varphi_1 = -\mathrm{D}. \end{cases}$$

De ces équations on déduit d'abord

$$(9)\quad \begin{cases} k_1 \frac{a_1^3}{r_1^3} = \sqrt{\mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B}^2}, \\ k_1 \frac{a_1^3}{r_1^5} z_1 = \sqrt{\mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2}, \end{cases}$$

puis

$$(10)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} 2\varphi_1 = \dfrac{B}{2A}, \\ \operatorname{tang} \varphi_1 = \dfrac{D}{C}. \end{cases}$$

Pour que ces deux équations soient compatibles, il faut que l'on ait

$$(11)\quad 4ADC = B(C^2 - D^2).$$

En admettant que cette condition soit remplie, et que k_1, a_1 soient donnés, les formules ci-dessus feront connaître r_1, z_1 et φ_1.

Note sur le profil des lames du dynamomètre de Poncelet.

PAR M. H. LÉAUTÉ,

Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique.

Pour obtenir d'un dynamomètre à lames toute la sensibilité dont il est susceptible, il est nécessaire, comme l'on sait, de donner aux lames qui le composent la forme d'un solide d'égale résistance [1].

Les lames des dynamomètres ayant toujours une largeur uniforme, on est ainsi conduit à donner au profil longitudinal de chaque moitié de lame la forme d'une parabole dont le sommet est à l'extrémité libre et dont l'axe est dirigé suivant la fibre neutre.

Cette forme ne laisse pas que d'être d'une réalisation pratique assez délicate, et la plupart des constructeurs, dans le but de faciliter l'exécution, font l'intérieur des lames entièrement plan et donnent à l'extérieur seulement la forme parabolique, croyant ainsi obtenir un solide d'égale résistance.

Mais, comme l'a fait remarquer le premier M. Resal, cette conséquence est en désaccord avec l'un des principes fondamentaux de la résistance des matériaux, qui exige que les sections, dont la loi de décroissance est celle indiquée ci-dessus, soient normales à la fibre neutre.

L'éminent géomètre a repris l'étude de cette question (*Mécanique générale*, tome V, § **40**) et a donné l'équation exacte de la fibre neutre des lames de dynamomètre dont la face intérieure est plane.

---

(1) Dans le cas d'une pièce rectangulaire de largeur uniforme, l'amplitude de flexion est ainsi double de ce qu'elle serait avec une pièce de section constante présentant la même résistance.

Toutefois, suivant la remarque de M. Resal lui-même, cette équation est trop compliquée pour être utilisée d'une manière immédiate; il restait donc à présenter le résultat obtenu sous une forme pratique, c'est-à-dire à trouver une forme de profil extérieur suffisamment exacte et facile à tracer.

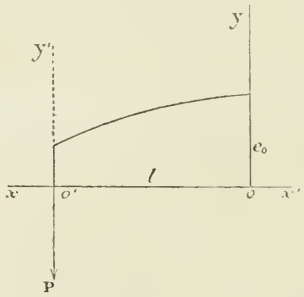
C'est là l'objet du présent Mémoire.

Forme de la fibre neutre. — Si l'on prend pour axe des x la face rectiligne du profil de la lame, pour axe des y une perpendiculaire, et que l'on place l'origine des coordonnées à l'extrémité libre de la lame, l'équation donnée par M. Resal pour la fibre neutre devient

$$x = \sqrt{2px - y^2} - p\mathrm{L}\left(1 + \frac{\sqrt{2px - y^2}}{p}\right) \text{ (1)}$$

(1) L'équation obtenue par M. Resal, avec les axes des coordonnées OX et OY

Fig. 1.



représentés ci-contre (*fig.* 1), est la suivante :

$$v = \frac{e_0^2}{l}\left[\sqrt{v - u} - \frac{e_0^2}{2l}\mathrm{L}\left(1 + \frac{2l}{e_0^2}\sqrt{v - u}\right)\right],$$

où l'on a posé

$$y^2 = u, \quad e_0^2\left(1 - \frac{x}{l}\right) = v.$$

Si l'on prend pour nouveaux axes, comme nous l'avons fait, O'X' et O'Y', il est clair que l'on obtient l'équation indiquée.

Le paramètre p a pour valeur $\frac{e_0^2}{2l}$, où l et e_0 désignent respectivement la demi-longueur et la demi-épaisseur de la lame considérée, cette dernière dimension étant mesurée au milieu de la lame.

Pour pouvoir étudier commodément la forme de la fibre neutre, il faut prendre comme variable auxiliaire la quantité $\sqrt{2px - y^2}$. La courbe qu'affecte cette fibre neutre est alors représentée par les deux équations simultanées

$$(1) \qquad 2px - y^2 = z^2,$$

$$(2) \qquad x = z - p\mathrm{L}\left(1 + \frac{z}{p}\right),$$

et on peut la considérer comme le lieu des points d'intersection des courbes (1) et (2) correspondant à une même valeur de z.

L'équation (1) représente, lorsque z varie, une suite de paraboles ayant toutes pour axe l'axe des x, et l'équation (2) une suite de droites parallèles à l'axe des y.

Les paraboles (1) sont toutes égales à la parabole

$$(\mathrm{A}) \qquad y^2 = 2px,$$

et elles ont leur sommet au pied de l'ordonnée de cette parabole qui est égale à z. On les obtiendra donc en cherchant sur la parabole (A) le point qui a pour ordonnée z et en déplaçant ensuite cette parabole par un mouvement de translation opéré dans la direction Ox jusqu'à ce que son sommet arrive au pied de cette ordonnée que l'on suppose ne pas avoir bougé.

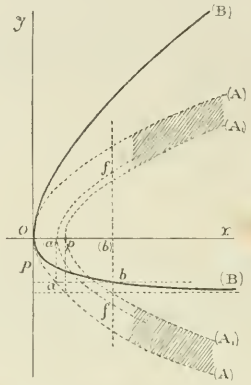
Quant aux droites (2), ce sont celles qui, parallèles à OY, détachent une ordonnée égale à z dans la courbe

$$(\mathrm{B}) \qquad x = y - p\mathrm{L}\left(1 + \frac{y}{p}\right).$$

Cette courbe a la forme indiquée ci-contre (*fig.* 2). Elle est située tout entière à droite de l'axe des y qu'elle touche à l'origine, et elle a une asymptote horizontale correspondant à $y = -p$.

La partie supérieure de (B) est entièrement extérieure à la parabole (A), et la partie inférieure entièrement intérieure à cette parabole. On

Fig. 2.



vérifie aisément ce fait par cette remarque que l'on a, pour la courbe (A),

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p},$$

et pour la courbe (B),

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}\,\frac{1}{1+\frac{y}{p}}.$$

Pour y positif, $\frac{dx}{dy}$ est donc toujours plus grand dans (A) que dans (B) et l'inverse a lieu pour y négatif; x s'annulant d'ailleurs pour $y = 0$ dans les deux cas, on voit que, pour une même valeur de y, x sera toujours plus grand ou toujours plus petit dans (A) que dans (B), suivant que y sera positif ou négatif.

Les courbes (A) et (B) étant supposées tracées, il est facile d'en déduire la fibre neutre cherchée (F).

Il suffit pour cela de couper les courbes par une même horizontale quelconque ab (*fig.* 2), de mener les ordonnées (a) et (b) correspondant aux points d'intersection a et b et de déplacer ensuite la parabole

(A) dans la direction OX jusqu'à ce que son sommet se trouve au pied de (a) ; le point de rencontre f de la parabole ainsi obtenue avec (b) est un point de la courbe cherchée.

Cette dernière parabole étant tout entière à droite de l'ordonnée (a), il faut, pour obtenir un point réel, que l'ordonnée (b) soit à droite de (a), c'est-à-dire faire usage seulement de la branche inférieure de (B). Comme, d'ailleurs, z représente la distance à l'axe des x de l'horizontale menée en premier lieu, cela revient à dire que z doit être compris entre o et $-p$.

On voit donc que toutes les paraboles auxiliaires (1), servant à tracer la fibre neutre, seront comprises entre les courbes

$$(\mathrm{A}) \qquad y^2 = 2px$$

et

$$(\mathrm{A}_1) \qquad y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

et que la fibre neutre elle-même sera comprise dans cette zone (1) et s'approchera rapidement de la seconde de ces courbes qui en est une asymptote.

Pour les petites valeurs de z, c'est-à-dire dans le voisinage de l'origine, on a sensiblement

$$x = \frac{z^2}{2p} \quad \text{et} \quad y^2 = -\frac{2}{3}\frac{z^3}{2p};$$

la fibre neutre est donc tangente à l'axe des y; son rayon de courbure est nul et elle est osculée par la courbe

$$y^4 = \frac{2^3}{3^2} p x^3.$$

La fibre neutre n'étant pas l'inconnue principale du problème, nous ne pousserons pas plus loin l'étude de cette courbe.

(1) Cette zone est ombrée sur la *fig.* 2.

Mais il importe de remarquer que, dépendant du seul paramètre p, toutes les courbes de cette espèce sont semblables.

On doit signaler aussi que la variable auxiliaire z représente, au signe près, la sous-normale au point que l'on considère; on déduit, en effet, des équations (1) et (2) la relation

$$y\frac{dy}{dx} = -z.$$

Forme du profil extérieur. — Ces préliminaires posés, nous allons chercher la forme du profil extérieur de la lame, forme qui est la véritable inconnue du problème pris au point de vue pratique.

Le profil intérieur de la lame étant formé par l'axe des x, il suffit, pour obtenir le profil extérieur (E), de prolonger chaque normale à la fibre neutre d'une quantité égale à elle-même. Pour chaque point de ce profil, l'ordonnée est ainsi double de celle du point correspondant de la fibre neutre, et l'abscisse se trouve égale à celle de ce dernier point diminuée de la sous-normale.

Appelant donc X et Y les coordonnées courantes du profil cherché, on aura

$$Y = 2y, \tag{3}$$

$$X = x - z, \tag{4}$$

et par suite, en portant x et y dans les équations (1) et (2),

$$8pX - Y^2 = 4z(z + 2p), \tag{5}$$

$$X = 2z - pL\left(1 + \frac{z}{p}\right). \tag{6}$$

On voit, par ces dernières équations, que la nouvelle courbe est susceptible d'un mode de génération entièrement analogue à celui de la précédente.

Ses points sont déterminés par la rencontre des paraboles (5) avec les verticales (6).

Les paraboles (5) sont toutes égales à la parabole

$$Y^2 = 8pX. \tag{7}$$

et elles ont leurs sommets au pied de l'ordonnée de la parabole

$$\text{(C)} \qquad 2pX = Y(Y + 2p),$$

qui est égale à z.

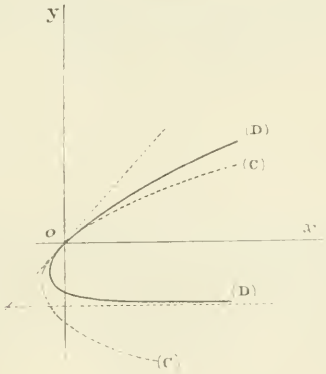
Les droites (b) sont celles qui détachent une ordonnée égale à z dans la courbe

$$\text{(D)} \qquad X = 2Y - pL\left(1 + \frac{Y}{p}\right).$$

Les équations (C), (D) diffèrent seulement des équations (A), (B) par le changement de X en X − Y. Les courbes (C), (D) dérivent ainsi des courbes (A), (B) par l'inclinaison des ordonnées que l'on ramène à être parallèles à la bissectrice de l'angle des axes, en laissant chaque point à la même hauteur au-dessus de l'axe Ox : elles ont donc la forme ci-contre (*fig.* 3).

Pour obtenir un point e de la courbe cherchée E, il faudra donc

Fig. 3.

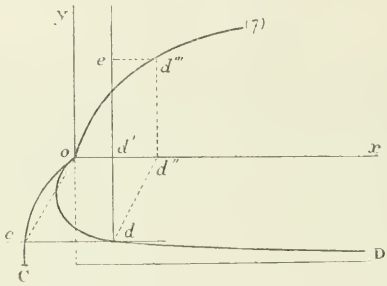


couper (C) et (D) par une droite horizontale comprise entre l'axe des x et l'asymptote de (D), mener les ordonnées (c) et (d) des deux points d'intersection c et d, et prendre le point de rencontre de d

avec la parabole égale à $Y^2 = 8pX$, dont le sommet est au pied de l'ordonnée (c).

Si l'on voulait mettre ce procédé en pratique, il serait facile d'éviter le tracé des paraboles successives dont il vient d'être question. En effet, en supposant la parabole (7) tracée une fois pour toutes (*fig.* 4),

Fig. 4.



il suffit, pour avoir le point e situé sur l'ordonnée (d), de prendre $d'e$ égal à $d''d'''$, ordonnée du point de la parabole (7) dont l'abscisse est égale à cd.

La courbe (E) est comprise dans la zone qui s'étend entre les paraboles

$$Y^2 = 8pX$$

et

$$Y^2 = 8p\left(X + \frac{p}{2}\right),$$

et elle a cette dernière courbe pour asymptote.

A l'origine, elle est tangente à l'axe des x, son rayon de courbure est nul, et elle est osculée par la courbe

$$Y^2 = -\frac{8}{3}\frac{X^3}{p}.$$

Elle commence ainsi à se diriger du côté des x négatifs pour revenir du côté opposé en se rapprochant de son asymptote curviligne. Le point de changement de direction correspond au maximum de X, et ses

coordonnées sont les suivantes :

$$\frac{z}{p} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{X}{p} = -1 + L.2 = -0,307,$$

$$\frac{Y}{p} = 0,738.$$

Quant au point où la courbe (E) vient couper de nouveau l'axe des y, il a pour coordonnées

$$\frac{z}{p} = -0,797,$$

$$X = 0,$$

$$\frac{Y}{p} = 1,958.$$

L'inclinaison de la tangente, donnée par l'équation

$$Y\frac{dY}{dX} = -\frac{4z^2}{p+2z},$$

a pour valeur en ce point

$$\frac{dY}{dX} = 2,185.$$

Ce point est déjà très rapproché de la parabole asymptote dont le point correspondant à $X = 0$ a pour coordonnée $Y' = 2$, ce qui donne une différence de $\frac{1}{50}$ seulement; les directions des deux courbes sont aussi sensiblement les mêmes, puisque l'on a, pour la parabole,

$$\frac{dY'}{dX} = 2.$$

Le rapprochement s'effectue d'une manière très rapide, car pour

$\frac{X}{p} = 1$ on a, avec la courbe (E),

$$\frac{z}{p} = -0,944,$$

$$\frac{Y}{p} = 3,462$$

et, avec la parabole,

$$\frac{Y'}{p} = 3,464;$$

la différence relative n'est donc plus que de l'ordre des millièmes.

L'expression analytique de la différence des ordonnées de la courbe (E) et de son asymptote parabolique est facile à obtenir en fonction de X pour de grandes valeurs de cette variable.

On a, en effet, en posant $1 + \frac{z}{p} = \varepsilon$,

$$(8) \qquad Y'^2 - Y^2 = 4p^2\varepsilon^2$$

et

$$\frac{X}{p} = 2\varepsilon - 2 - \log\varepsilon.$$

On en tire

$$\varepsilon = e^{-\frac{X}{p} - 2 + 2\varepsilon},$$

qui, pour de grandes valeurs de X, c'est-à-dire pour de petites valeurs de ε, se réduit à

$$\varepsilon = e^{-\frac{X}{p} - 2}.$$

Substituant donc dans (8) et remarquant que l'on peut remplacer $Y' + Y$ par $2Y'$, il vient

$$Y' - Y = \frac{2}{e^2}\, Y' e^{-\frac{X}{p}};$$

d'où, en remplaçant Y' par sa valeur,

$$(9) \qquad Y' - Y = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{2X}{p}} \left(\frac{X}{p} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

c'est-à-dire

$$(10) \qquad Y' - Y = \frac{1}{77} \frac{1}{e^{2\frac{X}{p}}\left(\frac{X}{p} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Les divers résultats qui précèdent donnent le moyen de tracer, avec toute la précision voulue, la courbe cherchée. Les équations ne renfermant qu'un seul paramètre p, toutes les courbes de cette espèce sont semblables, et il suffit d'en tracer une à une échelle convenable pour en déduire toutes les autres.

Dans la pratique, la quantité désignée par p a toujours une valeur très faible, et l'on peut, sans erreur appréciable, admettre que la courbe du profil extérieur cherché se confond avec l'asymptote parabolique à partir du point où celle-ci coupe l'axe des y. Il reste ainsi simplement à tracer la portion de courbe située à gauche de l'axe des y, et ce tracé pourra se faire avec une exactitude suffisante en l'assujettissant aux seules conditions de se raccorder avec la parabole précédente, d'avoir une tangente verticale au point dont les coordonnées sont $X = -\frac{3}{10}p$, $Y = \frac{3}{4}p$, et de toucher enfin l'axe des x à l'origine. L'erreur commise sera au plus égale à $\frac{1}{25}p$, comme il est facile de le vérifier.

Dans le cas des lames très minces, pour lesquelles p a une très petite valeur, on pourrait même s'en tenir au tracé habituel des constructeurs; les formules que nous avons données permettent, du reste, d'apprécier dans chaque cas l'erreur commise, qui est au plus égale à $\frac{1}{2}p$.

En résumé :

1° *Le tracé parabolique habituel des solides d'égale résistance ayant une largeur uniforme et une face plane n'est exact pratiquement que dans le cas où la quantité* $\frac{e_0^2}{l} - p$ *est petite, et il conduit à une erreur à peu près égale à* $\frac{p}{2}$.

2° *L'erreur commise peut être rendue moindre que* $\frac{1}{25}p$, *en adoptant le*

tracé suivant, pour l'explication duquel on suppose la pièce placée horizontalement, et le point d'encastrement à droite de l'extrémité libre : Tracer d'abord la parabole ordinaire en la déplaçant vers la gauche d'une quantité égale à $\frac{p}{2}$. *Prendre cette parabole pour profil dans la partie à droite de ce point et, pour profil à gauche de ce point, une courbe se raccordant avec la parabole précédente au point de départ, ayant une tangente verticale distante de* $\frac{3}{10}p$ *de l'extrémité libre et venant se raccorder horizontalement avec la face plane du solide au point d'application de la force extérieure.*

On peut remarquer que l'arc de parabole dont il est fait usage ici appartient à une parabole égale à celle dont on se sert habituellement, mais qui occupe une position différente.

Des enveloppes des courbes dans l'espace;

PAR M. COLLET.

Dans la théorie des courbes planes, la notion d'enveloppe, pour les courbes d'une même famille, résulte de la considération des intersections successives de ces courbes; aussi la définition donnée alors ne peut-elle s'appliquer aux courbes dans l'espace, attendu que *deux courbes d'une même famille, dans l'espace, ne se rencontrent généralement pas*; car, une famille de courbe étant définie par les équations

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z, t) = 0, \quad \psi(x, y, z, t) = 0,$$

qui renferment un paramètre arbitraire t dont les valeurs caractérisent les différentes courbes, les coordonnées des points communs à deux de ces courbes devraient satisfaire simultanément à quatre équations.

A la vérité, on semblerait conduit à une conclusion inverse si l'on remplaçait l'une des surfaces variables définissant les courbes par la surface fixe lieu de ces courbes; car les coordonnées des points communs à deux courbes ne devraient plus satisfaire qu'à trois équations.

Mais si l'on élimine t entre les équations (1) et que le résultat soit

$$F(x, y, z) = 0,$$

le système

$$(2) \qquad F(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z, t) = 0$$

ne sera pas, en général, équivalent au système (1), et ne pourra le remplacer.

Si, par exemple, on considère les droites données par

$$(3)\qquad \frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos t - \sin t, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin t + \cos t,$$

leur lieu est l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Or le système

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos t - \sin t, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

qui est équivalent au suivant :

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos t - \sin t, \quad \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{z}{c}\sin t + \cos t\right)^2,$$

outre le système proposé (3), comprend encore le suivant :

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos t - \sin t, \quad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\sin t - \cos t,$$

qui définit une seconde famille de droites situées aussi sur l'hyperboloïde lieu des premières; et alors que deux droites d'une même famille ne se rencontrent jamais, une droite d'une famille rencontre toutes celles de l'autre.

On peut d'ailleurs voir *a priori* que le système (1) ne comprend pas toutes les courbes définies par le système (2), en cherchant les courbes de chacun de ces systèmes qui passent par un même point de la surface $F(x, y, z) = 0$. En général, il y en a plusieurs du second système, et elles sont caractérisées par les valeurs de t qui sont racines de l'équation

$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

où x, y, z sont les coordonnées du point considéré, tandis que le premier système n'en donne qu'une. La valeur de t qui lui correspond doit être une racine commune des équations (1) quand x, y, z y représentent les coordonnées du point considéré, racine commune qui existe par hypothèse, mais qui est simple en général.

On conservera donc sous la forme (1) les équations générales d'une famille de courbes dans l'espace.

I.

Parmi les courbes définies par les équations (1), considérons-en deux S et S′, qui répondent à deux valeurs infiniment voisines, t et $t + \Delta t$, du paramètre. Toute plus courte distance PQ entre ces deux courbes est mesurée sur une normale commune et, en général, est du même ordre infinitésimal que Δt; quand Δt tend vers zéro, le point P tend sur

Fig. 1.

la courbe S vers une position limite déterminée M que nous désignerons sous le nom de *point limite* ou de *point de striction*. Le lieu de ces points pour toutes les courbes considérées sera leur *ligne de striction*; et, comme il peut exister plusieurs points de striction sur chaque courbe, la ligne de striction peut se composer de plusieurs branches.

Les courbes considérées sont rencontrées sous un angle fini par leur ligne de striction.

Soient en effet S, S′, S″, ... les courbes obtenues en donnant au paramètre variable des accroissements successifs de même ordre, PQ une plus courte distance entre les courbes S et S′, P′Q une plus courte distance, voisine de la première, entre S′ et S″, et ainsi de suite. Le lieu des points P, P′, P″, ... sera à la limite une ligne de striction qui se confondra d'ailleurs, à la limite, avec le lieu des points Q, Q′, ... L'angle sous lequel cette ligne rencontrera la courbe S est la limite de l'angle TPP′ formé par PP′ avec la tangente PT à la courbe S, et l'on a, par le triangle QPP′ rectangle à la limite,

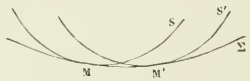
$$\lim \sin \mathrm{TPP'} = \lim \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PP'}},$$

quantité finie, puisque PQ et PP′ sont en général de l'ordre de Δt. Mais il n'en est plus ainsi quand la plus courte distance des deux courbes est d'ordre supérieur, et l'on voit qu'alors la ligne de striction devient tangente aux courbes considérées : nous l'appellerons l'*enveloppe* de ces courbes.

La *condition* d'existence d'une enveloppe pour les courbes d'une même famille dans l'espace est donc que deux de ces courbes infiniment voisines admettent constamment *une plus courte distance d'ordre supérieur*. Par suite, en négligeant des quantités d'ordre supérieur au premier, deux courbes infiniment voisines peuvent être considérées comme se coupant en leurs points limites; et alors, l'*enveloppe est le lieu des intersections successives de ces courbes*, les quantités d'ordre supérieur au premier étant négligées.

La *réciproque* est vraie, c'est-à-dire que, *si les courbes d'une même famille sont tangentes à une même courbe, cette dernière est leur enveloppe*; ou, en d'autres termes, deux courbes infiniment voisines admettent une plus courte distance d'ordre supérieur; car, si M et M′ sont les

Fig. 2.



points où ces deux courbes S et S′ touchent la courbe fixe Σ, l'arc MM′ étant du premier ordre, la distance de M′ à la courbe S est du second ordre, et, par suite, les courbes S et S′ ont, dans le voisinage des points M et M′, une plus courte distance qui est du second ordre au moins.

Analytiquement, si deux courbes infiniment voisines sont définies par les équations (1) et (4),

$$(4) \qquad \varphi(x, y, z, t + \Delta t = 0, \quad \psi(x, y, z, t + \Delta t) = 0,$$

en négligeant les quantités d'ordre supérieur au premier, ces dernières pourront s'écrire

$$\varphi(x, y, z, t) + \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \psi(x, y, z, t) + \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

et la condition pour qu'il y ait une enveloppe sera que les quatre équations

$$(5) \qquad \varphi(x, y, z, t) = 0, \quad \psi(x, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

admettent un système de solutions communes, pour x, y, z, quel que soit t; c'est-à-dire que, si l'on élimine x, y, z entre ces quatre équations, l'équation résultante devra être une identité. Telle est la *condition analytique* que doivent remplir les équations (1) pour que les courbes qu'elles définissent admettent une enveloppe. Quant aux équations de cette dernière, elles résulteront de l'élimination de t entre trois quelconques des équations (5).

Plus simplement, si la famille des courbes est définie par

$$x = \varphi(z, t), \quad y = \psi(z, t),$$

les équations $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$ qu'il faut adjoindre aux précédentes devront admettre, pour chaque valeur de t, une même valeur de z; et, en exprimant que ces deux équations ont toujours, quel que soit t, une racine commune, on exprimera aussi la condition pour que les courbes considérées admettent une enveloppe.

Ainsi les droites définies par les équations

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

où a, b, p, q sont des fonctions de t, admettront une enveloppe si les équations

$$z\,da + dp = 0, \quad z\,db + dq = 0$$

sont compatibles, quel que soit t, c'est-à-dire si l'on a

$$da\,dq - db\,dp = 0,$$

ce qui est la condition connue pour que la surface réglée, lieu des droites considérées, soit développable.

On peut donner maintenant une interprétation géométrique des résultats obtenus.

Les équations $\varphi = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ définissent la caractéristique de la

première surface variable (1), de même que $\psi = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ déterminent celle de la seconde; donc, pour qu'il y ait une enveloppe, il faut que, pour chaque valeur de t, *les caractéristiques des deux surfaces variables qui définissent les courbes considérées se rencontrent;* et comme les points communs à ces deux caractéristiques variables appartiennent à l'enveloppe, *cette enveloppe est aussi l'intersection des enveloppes des surfaces variables qui définissent les courbes considérées.*

Enfin il est facile de montrer que *chaque courbe n'a qu'un contact du premier ordre avec l'enveloppe;* car ce théorème est vrai pour les courbes planes, et par suite pour les projections des courbes sur des plans quelconques, d'où il est facile de remonter aux courbes dans l'espace, puisque l'ordre du contact de deux courbes ne saurait être supérieur à celui de leurs projections sur un plan quelconque.

Ces propriétés générales étant établies, nous allons passer à l'étude d'un cas remarquable qui conduit à des propriétés importantes : c'est celui où les courbes de la famille considérée sont les caractéristiques successives d'une surface variable.

II.

Les caractéristiques d'une famille de surfaces admettent toujours une enveloppe qui est l'arête de rebroussement de l'enveloppe de ces surfaces.

Cela résulte très simplement de ce qui précède.

Si, en effet,

$$f(x, y, z, t) = 0$$

est l'équation d'une famille de surfaces caractérisées par les valeurs données au paramètre t, pour chaque valeur de t la caractéristique de la surface correspondante est définie par le système

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

et les équations (5) qui doivent admettre des solutions communes en x, y, z, quel que soit t, pour qu'il y ait une enveloppe, se réduisent ici à trois

$$(6) \qquad f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0;$$

donc l'enveloppe existe en général; ses équations s'obtiennent en éliminant t entre les équations précédentes, et l'on voit que cette enveloppe est bien l'arête de rebroussement de l'enveloppe des surfaces considérées.

Ici chaque courbe a un *contact du second ordre* avec l'enveloppe; ou, en d'autres termes, *les caractéristiques d'une famille de surfaces ont un contact du second ordre avec l'arête de rebroussement de l'enveloppe de ces surfaces.*

Une caractéristique particulière répondant à la valeur t_1 du paramètre t sera donnée par les équations

$$(7) \qquad f(x, y, z, t_1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t_1} = 0,$$

et les coordonnées d'un point où elle touche l'enveloppe satisferont en outre à l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} = 0.$$

Pour former les conditions d'un contact du second ordre entre cette courbe (7) et l'enveloppe (6), on tirera de ces dernières équations (6) les valeurs des coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'enveloppe en fonction de t, on les portera dans les équations (7), qui deviendront

$$\varphi(t, t_1) = 0, \quad \psi(t, t_1) = 0,$$

et l'on écrira que, pour $t = t_1$, on doit avoir

$$\varphi(t, t_1) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

$$\psi(t, t_1) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

ce qui exprime d'ailleurs que les deux courbes ont au point correspondant trois points communs confondus.

Nous allons vérifier que ces conditions sont en effet satisfaites dans le cas qui nous occupe.

Et d'abord cela est évident pour les équations $\varphi(t, t_1) = 0$, $\psi(t, t_1) = 0$, puisque, pour $t = t_1$, les valeurs de x, y, z déduites des équations

(6) se rapportent à un point commun à la courbe (6) et à la caractéristique (7). Pour les autres équations, nous les développerons en différentiant les équations (7), par rapport à t, les substitutions indiqués étant supposées effectuées, et, en posant

$$f' = \frac{\partial f(x, y, z, t_1)}{\partial t_1},$$

nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} = 0, \\ \dfrac{df'}{dx}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f'}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial f'}{dz}\dfrac{dz}{dt} = 0, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{dx^2}{df^2} + \cdots\right) + 2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dy}{dt} + \cdots\right) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{d^2x}{dt^2} + \cdots\right) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 f'}{\partial x^2}\dfrac{dx^2}{dt^2} + \cdots\right) + 2\left(\dfrac{\partial^2 f'}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dy}{dt} + \cdots\right) + \left(\dfrac{\partial f'}{dx}\dfrac{d^2x}{dt^2} + \cdots\right) = 0. \end{cases}$$

Il faut supposer que dans ces équations on fasse $t = t_1$, c'est-à-dire que x, y, z se rapportent au point commun considéré des courbes (6) et (7).

Si, d'autre part, on suppose que dans les équations (6) on remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction de t déduites de ces mêmes équations, on aura des identités qui en pourront fournir d'autres par des différentiations.

Différentions ainsi une première fois, par rapport à t, les deux premières équations (6), en simplifiant les résultats au moyen de la seconde et de la troisième de ces équations on obtient des identités qui se réduisent, pour $t = t_1$, aux conditions (8), qui sont ainsi satisfaites, et cela montre que les deux courbes sont tangentes.

Si l'on différentie maintenant les identités précédemment obtenues, et qu'on réduise les résultats au moyen de ces mêmes identités, on en obtient deux nouvelles qui, pour $t = t_1$, deviennent conformes aux conditions (9) qui sont ainsi satisfaites; d'où il suit que le contact est bien du second ordre.

On verrait facilement qu'il n'est pas, en général, d'un ordre plus élevé.

Nous remarquerons que le théorème qui précède établit une différence essentielle entre le cas qui nous occupe et celui d'une famille

quelconque de courbes admettant une enveloppe, de sorte que les courbes d'une telle famille ne peuvent pas être considérées, en général, comme les caractéristiques des surfaces d'une même famille.

Nous établirons encore une propriété générale de l'arête de rebroussement qui conduit à une réciproque digne de remarque.

Chaque surface d'une même famille a un contact du second ordre avec l'arête de rebroussement de la surface-enveloppe.

Si $f(x, y, z, t) = 0$ est l'équation de la famille de surfaces, les coordonnées d'un point quelconque de l'arête de rebroussement de leur enveloppe sont données, en fonction de t, par les équations

$$(10) \qquad f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

et, pour $t = t_1$, ces valeurs définissent un point commun à cette arête de rebroussement et à la surface particulière $f(x, y, z, t_1) = 0$. Si l'on suppose que dans cette dernière équation x, y, z soient remplacés par leurs valeurs en fonction de t déduites des équations (10), et que le résultat prenne la forme $F(t, t_1) = 0$, les conditions d'un contact du second ordre entre l'arête de rebroussement et la surface considérée seront que l'on ait, pour $t = t_1$,

$$F(t, t_1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0,$$

c'est-à-dire, en supposant que x, y, z désignent les fonctions de t tirées des équations (10),

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(x, y, z, t_1) = 0, \\ & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0, \\ & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx^2}{dt^2} + \cdots\right) + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \cdots\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \cdots\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces conditions sont en effet satisfaites pour $t = t_1$. Cela est évident pour la première; et, quant aux deux autres, si l'on différentie deux fois, par rapport à t, la première des identités qu'on obtient en remplaçant, dans les équations (10), x, y, z par les valeurs tirées de ces mêmes équations, en simplifiant les résultats au moyen de la seconde et de la troisième identité, on en obtient deux nouvelles qui, pour $t = t_1$,

deviennent, comme il est facile de le vérifier, conformes aux deux dernières conditions (11), qui ainsi sont bien satisfaites.

Réciproquement, si les surfaces d'une même famille ont un contact du second ordre avec une courbe donnée, cette courbe est l'arête du rebroussement de leur surface-enveloppe.

Les coordonnées du point où chaque surface $f(x, y, z, t) = 0$ touche la courbe donnée sont des fonctions du paramètre t, soit

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t), \tag{12}$$

et ces équations peuvent être considérées comme celles de la courbe donnée. Exprimant que la surface répondant à la valeur t_1 du paramètre a un contact du second ordre avec cette courbe, on retombe sur les conditions (11) qui précèdent, et qui ici sont supposées satisfaites, x, y, z étant remplacés par leurs valeurs (12), dans lesquelles on suppose $t = t_1$.

Mais, d'autre part, si l'on remplace, dans l'équation générale $f(x, y, z, t) = 0$, x, y, z par leurs valeurs (12) en fonctions de t, elle deviendra identique, ainsi que les suivantes qu'on en déduit par différentiation :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{dz}\frac{\partial z}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} = 0, \\ &\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx^2}{dt^2} + \cdots\right) + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \cdots\right) \\ &\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \cdots\right) + 2\left(\frac{d^2 f}{\partial t\,\partial x}\frac{dx}{dt} + \cdots\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Si l'on fait $t = t_1$ dans ces identités, x, y, z prennent alors les valeurs qui répondent au point de contact de la courbe et de la surface particulière considérée; et de la comparaison de la première de ces identités avec la seconde condition (11), il résulte d'abord que l'on doit avoir, pour $t = t_1$, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire que la caractéristique de la surface variable considérée passe constamment par le point de contact en question. Mais les coordonnées de ce point de contact satisfaisant, pour chaque valeur de t, à l'équation $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, cette dernière devient à son tour une identité si l'on y remplace x, y, z par leurs valeurs (12),

et l'on en déduit alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

ce qui permet de réduire la seconde identité (13) à la suivante

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx^2}{dt^2} + \cdots\right) + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \cdots\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2} + \cdots\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

En faisant $t = t_1$ dans ce résultat, il résulte de la comparaison avec la dernière condition (11) que les coordonnées du point de contact satisfont encore à l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$, où $t = t_1$. Ce point est donc sur l'arête de rebroussement de la surface-enveloppe des surfaces considérées, et la courbe donnée coïncide avec cette arête de rebroussement.

Appliquons cela au *cas particulier où les surfaces considérées sont des sphères*.

On sait que toute sphère qui passe par le cercle osculateur d'une courbe, pour l'un de ses points, a avec la courbe, au même point, un contact du second ordre. Si l'on suppose que le rayon de cette sphère soit une fonction des coordonnées du point de contact, *la courbe donnée devient l'enveloppe de la caractéristique de cette sphère variable*, ou l'arête de rebroussement de sa surface-enveloppe. Si le rayon de la sphère est constant, on a une *surface-canal*. Il existe une seconde surface-canal engendrée par une sphère égale à la première, et qui admet la même arête de rebroussement.

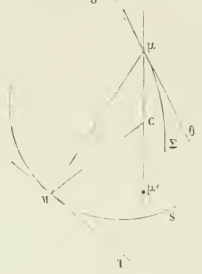
Tout cela peut d'ailleurs s'établir très simplement par la Géométrie seule; et, pour plus de simplicité, ne considérons que le cas d'une surface-canal.

Si une sphère de rayon donné R a en M un contact du second ordre avec une courbe donnée S, son centre est en μ, sur la droite $C\mu$ polaire de M, de façon que $M\mu = R$. Il y a un second point μ' symétrique de μ par rapport au plan osculateur en M qui répond à la question.

Comme la longueur $M\mu$ reste constante pendant que la sphère se meut, et qu'elle est normale à la courbe S, elle est aussi constamment normale à la courbe Σ lieu du centre de la sphère. Enfin, puisque cette courbe Σ est sur la surface polaire de la courbe S, sa tangente $\mu\mathcal{T}$ en μ est dans le plan normal en M à la courbe S, et, par suite, les tangentes MT et $\mu\mathcal{T}$ à ces deux courbes S et Σ sont l'une à l'autre perpendi-

culaires dans l'espace. Par conséquent, puisque la caractéristique d'une sphère mobile de rayon constant est un grand cercle normal à la courbe lieu de son centre, cette caractéristique sera donc un cercle de centre

Fig. 3.



μ, de rayon μM, situé dans le plan μMT, et, par suite, tangente à la courbe S qui est ainsi l'arête de rebroussement de la surface-canal enveloppe de la sphère.

Les courbes S et Σ jouissent de certaines propriétés réciproques faciles à établir, par exemple la suivante : *Si le centre d'une sphère de rayon constant* $R = M\mu$ *décrit la courbe* S, *la courbe* Σ *est l'arête de rebroussement de la surface-enveloppe.*

Mais nous ne nous arrêterons pas à la démonstration, facile d'ailleurs, de ce théorème, non plus qu'à quelques autres propriétés des surfaces-canaux et des surfaces-enveloppes des sphères variables qui nous entraîneraient un peu loin en nous éloignant trop de l'objet principal de cette simple Note. Et, pour terminer, nous donnerons un dernier théorème général dont la démonstration résulte facilement de ce qui précède, et de cette propriété que possède toute courbe qui a un contact d'un ordre quelconque avec une autre courbe, d'avoir aussi un contact au moins du même ordre avec toute surface qui passe par cette courbe.

Ce théorème général est le suivant :

Si les courbes d'une famille ont un contact du second ordre avec une courbe donnée, cette dernière, qui est leur enveloppe, est l'arête de rebroussement commune des enveloppes des surfaces qui, par leurs intersections successives, définissent les courbes considérées. Les caractéristiques de ces surfaces variables sont constamment tangentes l'une à l'autre.

Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure analogue à celle de Mac-Laurin;

PAR M. M.-N. VANĚČEK.

1. En écrivant dans cette Note *un polyèdre* P *de forme variable à n faces*, on entend que toutes ses faces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ enveloppent respectivement des surfaces développables $S_1, S_2, \ldots, S_n$, de classe $s_1, s_2, \ldots, s_n$, et que toutes ses arêtes (c'est-à-dire des droites de rencontre de deux faces successives) $\overline{F_1F_2}, \overline{F_2F_3}, \ldots, \overline{F_{n-1}F_n}$, moins une (savoir $\overline{F_nF_1}$), rencontrent respectivement des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, d'ordre $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ [1].

Si le polyèdre P *varie ainsi, l'arête libre* $\overline{F_1F_n}$ *engendre une surface gauche* X *qui sera du degré*

$$(a) \qquad 2s_1s_1\ldots s_nc_1\ldots c_{n-1}.$$

On verra que cette formule est vraie pour la surface S_k, de classe s_k, si elle est vraie pour une droite quelconque D (surface développable de première classe) remplaçant la surface S_k. La droite qui joint le point où la face F_{k-1} rencontre la courbe C_{k-1} avec le point où la face F_{k+1} perce la courbe C_k, engendre une surface Y de classe y, quand l'arête

(1) On entend dans toute cette Note, excepté dans le dernier alinéa, les lignes à double courbure.

libre $\overline{F_1 F_n}$ rencontre continuellement une droite quelconque P. Les plans tangents communs aux surfaces Y et S_k donnent les points où la droite P perce la surface X. On peut déterminer la classe y de la surface Y comme il suit : On prend une droite quelconque D, et, quand la face F_k l'enveloppe, l'arête libre $\overline{F_1 F_n}$ engendre une surface gauche U d'ordre u. Les points où la surface U perce la droite P donnent les plans tangents de la surface Y, qui passent par la droite D. Donc $y = u$. Mais la surface U est la surface X, quand on remplace la surface S_k par la droite D. Donc, etc.

On démontrerait d'une manière analogue que la formule (a) est vraie pour la courbe C_k, quand elle est vraie pour une droite quelconque D, remplaçant la courbe C_k.

Au cas où toutes les surfaces $S_1, \ldots, S_n$ et toutes les courbes $C_1, \ldots, C_{n-1}$ sont des droites, la surface X est du deuxième degré. Alors la formule (a) est vraie.

Tous les plans de la surface S_n sont multiples plans tangents d'ordre

$$s_1 s_2 \ldots s_{n-1} c_1 \ldots c_{n-1}$$

de la surface X.

2. *Si trois polyèdres variables* P, P′, P″ *à* n, n', n'' *faces ont la première face commune qui enveloppe une surface développable* S_1 *d'ordre* s_1, *c'est-à-dire* $F_1 \equiv F'_1 \equiv F''_1$ *et* $S_1 \equiv S'_1 \equiv S''_1$, *les dernières faces* F_n, $F'_{n'}$, $F''_{n''}$ *se rencontrent en un point qui parcourt une courbe d'ordre* (¹)

$$(b) \qquad 3 s_1 s_2 \ldots s_n s' \ldots s'_{n'} s_2 s_3 \ldots s''_{n''} c_1 \ldots c_{n-1} c'_1 \ldots c'_{n'-1} c''_1 \ldots c''_{n''-1}.$$

(¹) Chasles (*Aperçu historique*, p. 404, seconde édition) indique la construction suivante de la courbe du troisième ordre :

« Quand les quatre faces d'un tétraèdre mobile sont assujetties à passer respectivement par quatre droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et que trois sommets du tétraèdre doivent se trouver sur trois autres droites, placées aussi d'une manière quelconque dans l'espace, le quatrième sommet du tétraèdre parcourra une courbe à double courbure du troisième degré. »

Il est évident que cette construction est impossible. Au cas particulier du théorème 2, on aura une construction semblable à celle de Chasles, savoir :

Quand quatre faces d'un tétraèdre mobile sont assujetties à passer respectivement par quatre droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et que

Nous ne démontrons pas ce théorème et les théorèmes suivants, parce qu'il suffit d'employer la même voie, comme dans le précédent.

3. En désignant par $\gamma, \gamma', \gamma''$ les points où les dernières faces F_n, F'_n, F''_n des polyèdres P, P', P'' rencontrent respectivement les courbes C_n, $C'_{n'}$, $C''_{n''}$ d'ordre c_n, $c'_{n'}$, $c''_{n''}$, on obtiendra :

Si trois polyèdres variables P, P', P'' *ont la première face commune qui enveloppe une surface développable* S_1 *d'ordre* s_1, *le plan* $\gamma\gamma'\gamma''$ *enveloppe une surface développable de classe*

$$(c) \qquad 3s_1 s_2 \ldots s_n s'_2 \ldots s'_{n'} s''_1 \ldots s''_{n''} c_1 \ldots c_n c'_1 \ldots c'_{n'} c''_1 \ldots c''_{n''}.$$

4. En prenant, au lieu de la surface développable S_1, une surface quelconque S_1 de classe s_1, on obtiendra au cas 2 *une surface* d'ordre (b) et au cas 3 une surface de classe (c).

5. On peut déduire les théorèmes suivants, d'après le principe de dualité des théorèmes précédents.

Désignons par γ_0 chaque point où la première face F_1 du polyèdre P, de forme variable à n faces, perce une courbe quelconque C_0 d'ordre c_0 et par γ_n chaque point où la dernière face F_n de ce polyèdre rencontre une courbe quelconque C_n d'ordre c_n. *La droite* $\gamma_0\gamma_n$ *remplit une surface gauche du degré*

$$(a') \qquad 2s_1 s_2 \ldots s_n c_0 c_1 \ldots c_{n-1} c_n,$$

quand le polyèdre P varie de maniere déterminée.

Si les premières faces F_1, F'_1, F''_1 *des polyèdres variables* P, P', P'' *se coupent sur une courbe* C *d'ordre* c, *les dernières faces* F_n, F'_n, $F''_{n''}$ *se coupent en un point qui parcourt une courbe d'ordre*

$$(b') \qquad 3s_1 \ldots s_n s'_1 \ldots s'_{n'} s''_1 \ldots s''_{n''} c c_1 \ldots c_{n-1} c'_1 \ldots c'_{n'-1} c'' \ldots c''_{n''-1}.$$

---

trois *arêtes* situées dans une face F_1 du tétraèdre doivent rencontrer trois autres droites placées aussi d'une manière quelconque dans l'espace, le sommet où se coupent trois autres faces du tétraèdre parcourra une courbe à double courbure du troisième ordre.

Et, en remplaçant la courbe C par *une surface* quelconque C d'ordre c, on obtiendra *une surface* d'ordre (b').

Lorsque les premières faces F_1, F'_1, F''_1 des polyèdres variables P, P′, P″ se coupent sur une courbe C d'ordre c, le plan $\pi\pi'\pi''$ enveloppe une surface développable de classe

$$(c') \qquad 3s_1 \ldots s_n s'_1 \ldots s'_{n'} s''_1 \ldots s''_{n''} c_1 \ldots c_{n-1} c_n c'_1 \ldots c'_{n'} c''_1 \ldots c''_{n''},$$

et pour une surface quelconque C d'ordre c, au lieu de la courbe C, on aura une surface de classe (c').

6. On peut généraliser enfin le théorème dû à Mac-Laurin [1] sur la génération des courbes planes de la manière suivante :

Si un polygone, de forme variable, se meut de manière que tous ses côtés enveloppent respectivement des courbes $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ *de classe* $c'_1 c'_2 \ldots c'_n$, *et que tous ses sommets, moins un, parcourent des courbes* $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ *d'ordre* $c_1 c_2 \ldots c_{n-1}$, *le sommet libre engendre une courbe d'ordre*

$$2c'_1 c'_2 \ldots c'_n c_1 c_2 \ldots c_{n-1}.$$

Je ne connais pas la démonstration du théorème de Mac-Laurin donnée par lui-même, mais on peut démontrer ce théorème d'une manière analogue à celle de 1, en prouvant qu'il est vrai pour une courbe quelconque C'_k quand il est vrai pour un point quelconque remplaçant la courbe C'_k, et qu'il est vrai pour une courbe quelconque C_h quand il est vrai pour une droite quelconque D, remplaçant cette courbe.

---

[1] Voir *Aperçu historique*, etc., p. 150.

Équations des petits mouvements d'un liquide pesant, quand ils sont principalement horizontaux, que les frottements s'y trouvent peu sensibles, et que le liquide est contenu soit dans un bassin à fond presque horizontal, soit dans un tuyau ou un canal de peu de pente longitudinale, la surface supérieure, soumise à des pressions constantes ou légèrement variables, n'ayant aussi que des pentes faibles;

PAR M. J. BOUSSINESQ [1].

I. — BUT DE CE MÉMOIRE.

Parmi les classes nombreuses d'ondes qu'on observe dans les liquides, la plus intéressante est celle des ondes dites *de translation*, où toutes les couches fluides, depuis la surface jusqu'au fond, participent au mouvement, dans une proportion à fort peu près égale s'il s'agit d'un fluide qui était en repos à l'instant où les ondes étudiées s'y sont produites ou propagées, et, tout au moins, dans une mesure très

(1) Ce travail se rattache au sujet traité déjà, en 1872, dans un Mémoire du *Journal de Mathématiques*, relatif à l'onde solitaire et aux autres ondes de translation propagées le long de canaux contenant un liquide en repos. Il constitue aussi un *deuxième complément* à l'*Essai sur la théorie des eaux courantes*, publié dans le *Recueil des Savants étrangers* de l'Académie des Sciences de Paris (t. XXIII et XXIV) : un *premier complément* a paru au Volume de 1878 du *Journal de Mathématiques* (t. IV, p. 335 à 376).

notable si, au contraire, le fluide animé du mouvement ondulatoire s'écoule en même temps, le long d'un canal, par filets inégalement rapides. Ces ondes, au nombre desquelles on compte l'onde si remarquable appelée *solitaire*, sont celles dont la longueur est très supérieure à la profondeur totale du liquide : caractère provenant de ce que les vitesses imprimées à la masse fluide y sont en majeure partie horizontales, c'est-à-dire parallèles aux grandes dimensions de la masse.

Dans mon *Essai sur la théorie des eaux courantes*, où j'ai étudié en détail cette classe d'ondes (p. 261 à 324, 348 à 470, etc.), je me suis attaché à deux cas principaux et, pour ainsi dire, extrêmes, qui sont, d'une part, le cas où le mouvement ondulatoire se produit au sein d'une eau tranquille, d'autre part, le cas où, au contraire, il se propage le long d'un courant dont le régime préalable était sensiblement uniforme. Mais j'ai supposé, en traitant le second cas, que le passage des ondes n'altérait pas beaucoup l'uniformité du régime, ou, autrement dit, que les changements qu'il introduit dans les vitesses des divers filets fluides n'étaient que d'assez petites fractions de ces vitesses mêmes. Or, pour des ondes d'une hauteur sensible, un peu comparable à la profondeur totale, les vitesses variables qu'elles apportent sont, dans la plupart des cours d'eau non torrentueux, du même ordre que les vitesses antérieures et, surtout, que leurs différences entre les filets de la surface et ceux du fond. Il restait donc à traiter un cas intermédiaire important, celui où les filets fluides présentent entre eux, avant l'arrivée des ondes, des différences de rapidité qui ne soient ni très petites, ni très grandes par rapport aux vitesses produites ultérieurement. Je me propose d'embrasser ici ce cas, avec celui d'un liquide d'abord en repos, dans une analyse aussi générale et aussi simple que possible.

La légère pente primitive des filets fluides et l'influence des frottements pourront y être négligées sur des longueurs ou pendant des périodes de temps modérées et même assez considérables. En effet, d'une part, la petitesse des vitesses de régime uniforme acquises par le liquide impliquera la supposition de pentes de superficie insignifiantes en comparaison de celles qui se produiront lors du passage des ondes; et, d'autre part, les frottements développés par des vitesses de cet ordre, n'ayant qu'une influence comparable à celle de la pente superficielle de régime uniforme dont il vient d'être parlé et qu'ils neutralisaient, se trouveront également

négligeables. Sans doute les vitesses initiales, très sensibles, des filets fluides sont dues à cette action de la pente superficielle primitive, dont on ne tient pas compte, et leur régularisation est due de même aux frottements, qu'on néglige aussi; mais ces deux effets ont exigé, pour se produire, des temps ou des parcours beaucoup plus longs que ceux durant lesquels se fait l'évolution considérée du mouvement ondulatoire, de sorte que leurs causes n'en sont pas moins très petites par rapport à celles qui se trouvent en jeu dans ce mouvement, le seul dont nous voulions ici nous occuper.

II. — Formules fondamentales

Supposons d'abord le liquide contenu dans un large bassin, ayant son fond horizontal ou peu incliné, et prenons pour plan des xy un plan horizontal très voisin de la surface libre primitive, pour axe des z une verticale, dirigée vers le bas. Appelons :

H, fonction de t, x et y, l'ordonnée du fond, que nous supposerons d'abord mobile, pour plus de généralité;

ζ, autre fonction de t, x et y, l'ordonnée de la surface;

p_1, égal encore à une fonction de t, x et y, la pression, p, mesurée à cette surface;

enfin, u, v, w les trois composantes de la vitesse, au point quelconque (x, y, z); et u_0, v_0, w_0 leurs valeurs au fond ou pour $z = H$, u_1, v_1, w_1 leurs valeurs à la surface, ou pour $z = \zeta$.

Les équations indéfinies de l'Hydrodynamique rationnelle deviendront ici, en observant que le fluide n'est soumis dans sa masse à aucune autre action extérieure que la pesanteur g, et en désignant, comme à l'ordinaire, par ρ sa densité constante, par u', v', w' les trois composantes de l'accélération produite au point (x, y, z) :

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -u', \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = -v', \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = g - w';$$

$$(2) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Les conditions spéciales, données également dans les Cours de Mécanique rationnelle, seront : 1°, au fond, ou pour $z = \mathrm{H}$,

$$(3) \qquad w_0 = \frac{d\mathrm{H}}{dt} + u_0 \frac{d\mathrm{H}}{dx} + v_0 \frac{d\mathrm{H}}{dy};$$

2°, à la surface, ou pour $z = \zeta$,

$$(4) \qquad w_1 = \frac{d\zeta}{dt} + u_1 \frac{d\zeta}{dx} + v_1 \frac{d\zeta}{dy}, \quad p = p_1.$$

Cherchons d'abord la relation, exprimant la conservation des volumes fluides, qui existe entre la profondeur $\mathrm{H} - \zeta$ et les deux *composantes horizontales moyennes de la vitesse*

$$\mathrm{U} = \int_\zeta^{\mathrm{H}} u \frac{dz}{\mathrm{H} - \zeta}, \quad \mathrm{V} = \int_\zeta^{\mathrm{H}} v \frac{dz}{\mathrm{H} - \zeta},$$

prises à l'époque t, depuis la surface jusqu'au fond, sur la verticale quelconque (x, y). A cet effet, multiplions l'équation de continuité (2) par dz et intégrons, sur chaque verticale, de $z = \zeta$ à $z = \mathrm{H}$. Comme

$$\int_\zeta^{\mathrm{H}} \frac{dw}{dz} dz = w_0 - w_1,$$

il viendra, d'après (3) et (4),

$$\int_\zeta^{\mathrm{H}} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} \right) dz + \frac{d(\mathrm{H} - \zeta)}{dt} + u_0 \frac{d\mathrm{H}}{dx} - u_1 \frac{d\zeta}{dx} + v_0 \frac{d\mathrm{H}}{dy} - v_1 \frac{d\zeta}{dy} = 0.$$

Or, si l'on observe que la règle classique de la différentiation des intégrales définies donne

$$\frac{d}{dx} \int_\zeta^{\mathrm{H}} u\, dz = \int_\zeta^{\mathrm{H}} \frac{du}{dx} dz + u_0 \frac{d\mathrm{H}}{dx} - u_1 \frac{d\zeta}{dx},$$

$$\frac{d}{dy} \int_\zeta^{\mathrm{H}} v\, dz = \int_\zeta^{\mathrm{H}} \frac{dv}{dy} dz + v_0 \frac{d\mathrm{H}}{dy} - v_1 \frac{d\zeta}{dy},$$

et que, de plus,

$$\int_{\zeta}^{H} u\,dz = (H-\zeta)U, \quad \int_{\zeta}^{H} v\,dz = (H-\zeta)V,$$

cette relation devient l'équation cherchée

$$(5) \qquad \frac{d(H-\zeta)}{dt} + \frac{d(H-\zeta)U}{dx} + \frac{d(H-\zeta)V}{dy} = 0.$$

On l'aurait obtenue directement, en considérant le filet d'étendue vertical dont la coupe horizontale est un rectangle élémentaire $dx\,dy$ du plan des xy, et en exprimant que le volume liquide qui l'occupe, $(H-\zeta)\,dx\,dy$, diminue, pendant l'instant dt, d'une quantité

$$-\frac{d(H-\zeta)}{dt}\,dt\,dx\,dy,$$

égale à l'excédent, $\frac{d(H-\zeta)U}{dx}\,dx\,dy\,dt$, du fluide qui sort par la seconde face normale aux x, sur celui, $(H-\zeta)\,dy\,(U\,dt)$, qui entre par la première, plus un excédent analogue pour les faces normales aux y.

A une première approximation, cette équation (5) donne simplement, dans la question traitée ici,

$$\frac{d(H-\zeta)}{dt} + (H-\zeta)\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy}\right) = 0.$$

En effet, les termes supprimés,

$$U\frac{d(H-\zeta)}{dx}, \quad V\frac{d(H-\zeta)}{dy},$$

de l'ordre des produits des vitesses U, V par les petites dérivées $\frac{d(H-\zeta)}{d(x,y)}$, sont négligeables devant la dérivée $\frac{d(H-\zeta)}{dt}$, laquelle est comparable aux produits des $\frac{d(H-\zeta)}{d(x,y)}$ par des vitesses de propagation supposées très

supérieures à U ou V [1]. De plus, on admet que ζ n'égale qu'une très petite fraction de $H - \zeta$, ou que la hauteur des ondes est, *à une première approximation*, négligeable en comparaison de la profondeur totale. Le facteur $H - \zeta$ pourra donc se réduire à H et, en résolvant par rapport à $\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy}$, on aura

$$(6) \qquad \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} = \text{sensiblement } -\frac{1}{H}\frac{d(H-\zeta)}{dt}.$$

III. — Recherche d'une première approximation, dans trois cas distincts.

La dernière équation (1), multipliée par dz, puis intégrée, à partir de $z = \zeta$, en observant que $p = p_1$ à cette limite, donne

$$(7) \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + g(z - \zeta) - \int_\zeta^z \alpha' dz;$$

et les valeurs de $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$, $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}$ qui s'en déduisent transforment les deux autres (1) en celles-ci :

$$(8) \qquad \begin{cases} u' = g\dfrac{d}{dx}\left(\zeta - \dfrac{p_1}{\rho g}\right) + \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_\zeta^z \alpha' dz, \\ v' = g\dfrac{d}{dy}\left(\zeta - \dfrac{p_1}{\rho g}\right) + \dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_\zeta^z \alpha' dz. \end{cases}$$

Or, rappelons qu'il s'agit ici de mouvements *principalement horizon-*

---

[1] Par définition, les vitesses avec lesquelles se propagent, le long d'une horizontale donnée, les diverses valeurs soit de la profondeur $H - \zeta$, soit des composantes u, ou v, ou w, sont les vitesses que devrait avoir un point mobile parcourant l'horizontale en question, pour que $H - \zeta$, u, v ou w y conservassent toujours ces mêmes valeurs, ou eussent leurs différentielles totales, obtenues en suivant le point, égales à zéro. Il suit évidemment de là que la vitesse de propagation, à l'époque t, pour chacune des quantités $H - \zeta$, u, v, w, est le rapport, changé de signe, de la dérivée partielle de celle-ci par rapport au temps à sa dérivée partielle par rapport à l'espace, prise le long de l'horizontale donnée. Or ce rapport reste fini, même quand ζ, u, v, w, U et V deviennent infiniment petits.

taux, ou tels, que la composante verticale w' de l'accélération soit très faible en comparaison de u' ou v'. Donc, à une première approximation, les derniers termes de (8) disparaissent à côté de u', v', et il vient

$$(9)\qquad u' = g\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right), \quad v' = g\frac{d}{dy}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right).$$

D'où il résulte que les accélérations horizontales u', v' sont presque les mêmes tout le long d'une verticale et aussi, par suite, dans toute région ayant ses dimensions petites par rapport à la longueur d'une onde, région pour toute l'étendue de laquelle les *pentes motrices*

$$\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right), \quad \frac{d}{dy}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right)$$

se trouveront à fort peu près pareilles. Et, comme nous supposons des vitesses u, v assez faibles pour ne faire parcourir aux molécules, durant le passage d'une intumescence (ou pendant la durée d'une période si le mouvement est périodique), que des espaces assez petits à côté de la longueur d'une onde, on voit que toutes les molécules pour lesquelles x et y étaient les mêmes, au début du temps assez modéré où on les considère, recevront constamment, à peu près, les mêmes accélérations u', v' et acquerront, par conséquent, des vitesses sensiblement égales dans le sens horizontal. Ainsi, *les différences existant entre les composantes u ou v de leurs vitesses resteront, à une première approximation, ce qu'elles étaient d'abord.*

Cela posé, nous admettrons que l'on se trouve dans l'un des trois cas suivants.

1° Ou bien les vitesses, au début du temps considéré, étaient nulles dans la partie de la masse fluide pour laquelle on étudie le mouvement, et, alors, d'après ce qu'on vient de voir, les vitesses horizontales acquises u, v seront peu dépendantes de z, ou ne différeront guère de leurs moyennes prises depuis le fond jusqu'à la surface le long d'une même verticale, moyennes que nous représentons respectivement par U et V.

2° Ou bien le mouvement est en majeure partie oscillatoire, de sorte que les molécules se retrouvent à peu près dans les mêmes positions au

bout d'un temps T assez modéré; et, dans ce cas, la moyenne

$$\int_t^{t+T} u \frac{dt}{T}, \quad \int_t^{t+T} v \frac{dt}{T},$$

pour une même molécule, des valeurs successives de u, v étant très faible par rapport à ces valeurs mêmes de u, v, la différence entre ces moyennes respectives, pour deux molécules quelconques, sera également très faible par rapport à u, v. Cela implique que la différence, à chaque instant, entre les valeurs effectives de u, ou de v, pour deux molécules peu éloignées, soit encore du même ordre de petitesse; puisque, d'après ce qu'on a vu, cette différence ne varie pas sensiblement durant le temps T et est, par suite, aussi faible que sa moyenne. Ainsi, dans le cas actuel d'un mouvement principalement oscillatoire, tout comme dans le cas précédent où l'état initial était le repos, u, v ne diffèrent pas sensiblement de U, V, c'est-à-dire dépendent peu de z.

3° Ou bien enfin, le fond étant supposé horizontal et situé à une profondeur constante H au-dessous de la surface libre primitive prise pour plan des xy, le fluide possédait, antérieurement à la production ou à la propagation des ondes qu'il s'agit d'étudier, de petites vitesses horizontales u, v, indépendantes du temps, et telles, que, si l'on appelle α, β leurs excédents respectifs sur la moyenne,

$$\int_0^H u \frac{dz}{H}, \quad \int_0^H v \frac{dz}{H},$$

de leurs valeurs prise de haut en bas, on ait les deux relations

$$9\ bis \qquad \int_0^H \left(\alpha \frac{d\alpha}{dx} + \beta \frac{d\alpha}{dy}\right) \frac{dz}{H} = 0, \quad \int_0^H \left(\alpha \frac{d\beta}{dx} + \beta \frac{d\beta}{dy}\right) \frac{dz}{H} = 0.$$

Ces relations, que nous admettrons entre les deux composantes des vitesses primitives des filets fluides, ou, plutôt, entre les excédents α, β de ces composantes sur leurs moyennes respectives, reviennent à supposer nulles en moyenne, le long de chaque verticale, des accélérations $u' = \alpha \frac{d\alpha}{dx} + \beta \frac{d\alpha}{dy}$, $v' = \alpha \frac{d\beta}{dx} + \beta \frac{d\beta}{dy}$ qui correspondraient à un mouvement pour lequel on aurait partout $u = \alpha$, $v = \beta$. Les valeurs

primitives considérées u, v vérifient d'ailleurs, d'après la condition de continuité (2), prise avec $w = 0$, la relation $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$: d'où il résulte évidemment, dans le même état primitif,

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\Pi} u\frac{dz}{\Pi} + \frac{d}{dy}\int_0^{\Pi} v\frac{dz}{\Pi} = 0$$

et, par suite, en retranchant celle-ci de la précédente,

$$\frac{d}{dx}\left(u - \int_0^{\Pi} u\frac{dz}{\Pi}\right) + \frac{d}{dy}\left(v - \int_0^{\Pi} v\frac{dz}{\Pi}\right) = 0,$$

ou bien

$$(9\ ter)\qquad \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} = 0.$$

Ce cas se présentera, par exemple, vu que les équations (9 *bis*) et (9 *ter*) se trouveront satisfaites identiquement, quand les diverses couches horizontales du fluide seront initialement animées, dans leurs plans respectifs, de petites translations, variables à volonté, en grandeur et en direction, d'une couche à l'autre; car u, v et, par suite, leurs différences α, β d'avec leurs moyennes n'y dépendront que de z, non de x ni de y.

Il se présenterait encore, entre autres cas, si la masse fluide s'écoulait par filets horizontaux, rectilignes et parallèles, inégalement rapides, suivant le sens desquels on aurait pris, par exemple, l'axe de x. En effet, dans un tel mouvement, la vitesse u et, par suite, son excédent α sur $\int_0^{\Pi} u\frac{dz}{\Pi}$ seraient fonction de y et de z seulement, tandis qu'on aurait $v = 0$, $\beta = 0$. Les relations (9 *bis*) et (9 *ter*) continueraient donc à se trouver vérifiées identiquement.

De telles vitesses initiales u, fonctions de y et z seulement, seront, par exemple, celles qu'auront acquises les différentes parties du fluide après de longs trajets, quand il s'agira d'un cours d'eau, d'une pente superficielle assez faible pour qu'on puisse la négliger dans une question d'ondes, parvenu à un régime uniforme dans lequel il y a équilibre entre les frottements et la petite composante de la pesanteur suivant le sens des filets liquides.

On a déjà dit que la durée des phénomènes étudiés (passage d'une intumescence dans une certaine région ou oscillation complète du fluide) est supposée assez peu longue, pour que l'influence des frottements n'ait pas le temps de se faire sentir. Si l'on considère, en particulier, le troisième cas, où des vitesses, inégales aux divers points, existent initialement dans le bassin, ces vitesses tendent à y disperser les molécules qui, au début du phénomène, se trouvaient sur une même verticale. Alors nous admettrons que ce phénomène soit assez court non seulement pour que les frottements y restent négligeables mais encore pour que l'éparpillement des molécules primitivement alignées sur une verticale n'ait lieu que dans une étendue de dimensions très petites par rapport à la longueur d'une ondulation, et comparables, par exemple, à la profondeur du bassin. Dans ces conditions, leur déplacement vertical et leurs déplacements latéraux suivant les x et les y, respectivement égaux à de minimes fractions des dimensions de mêmes sens de la masse liquide, auront fait varier assez peu leurs coordonnées z, x et y pour qu'on puisse, sauf de petites erreurs relatives, continuer à exprimer, par les mêmes fonctions de x, y et z qu'au début, leurs vitesses primitives horizontales, comme si ces coordonnées n'avaient pas changé.

IV. — Équations définitives de cette première approximation.

Il résulte de ce qui précède que u, v auront en général, une fois le phénomène commencé, deux parties distinctes, l'une, *acquise*, variable avec le temps t et les coordonnées x, y, mais sensiblement constante le long d'une verticale ou ne dépendant guère de z, l'autre, *initiale* ou indépendante de t, comprenant, en outre de sa valeur moyenne du fond à la surface, le terme appelé ci-dessus α ou β, qui satisfait aux relations (9 *bis*), (9 *ter*) et aux conditions évidentes

$$\int_0^H \alpha \frac{dz}{H} = 0, \quad \int_0^H \beta \frac{dz}{H} = 0.$$

On aura donc, à une première approximation,

$$u = U + \alpha, \quad v = V + \beta. \tag{10}$$

Cela posé, voyons d'abord ce que deviennent les équations (9) à cette première approximation. On peut y réduire la formule connue de u',

$$u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$

à son premier terme $\frac{du}{dt}$. En effet, celui-ci, étant de l'ordre du produit des $\frac{du}{d(x, y)}$ par des vitesses de propagation très supérieures à u, v, est beaucoup plus grand que les deux termes suivants; et il l'est également beaucoup plus que le dernier terme, $w\frac{du}{dz}$, comme on le voit en observant que la composante w de la vitesse éprouve, du fond à la surface, des variations comparables à ses valeurs intégrales, ou est de l'ordre de $\frac{dw}{dz}\mathrm{H} = -\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)\mathrm{H}$, et que, par suite, le produit $w\frac{du}{dz}$ se trouve seulement comparable à $\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)\mathrm{H}\frac{du}{dz}$, c'est-à-dire, *tout au plus*, à $\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)u$ ou aux termes $u\frac{du}{dx}$, $u\frac{dv}{dy}$, évidemment de l'ordre du précédent $u\frac{du}{dx}$, déjà négligé. D'ailleurs, d'après ce qui vient d'être dit, $\frac{du}{dt}$ est, à une première approximation, réductible à $\frac{d(\mathrm{U} + \alpha)}{dt}$, expression qui égale $\frac{d\mathrm{U}}{dt}$, vu que α ne dépend pas de t. Donc, on aura sensiblement $u' = \frac{d\mathrm{U}}{dt}$ et, de même, $v' = \frac{d\mathrm{V}}{dt}$; de sorte que les équations (9) deviendront, en y joignant l'équation approchée de continuité (6) :

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{U}}{dt} = g\dfrac{d}{dx}\left(\zeta - \dfrac{p_1}{\rho g}\right), \quad \dfrac{d\mathrm{V}}{dt} = g\dfrac{d}{dy}\left(\zeta - \dfrac{p_1}{\rho g}\right); \\ \dfrac{d(\mathrm{H} - \zeta)}{dt} = -\mathrm{H}\left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dx} + \dfrac{d\mathrm{V}}{dy}\right). \end{cases}$$

Si l'ordonnée H du fond et la pression p_1 à la surface sont connues en fonction de x, y et t, comme il arrive d'ordinaire, et si l'on donne de plus, en x et y, les valeurs initiales de l'ordonnée ζ de la surface, ainsi que des composantes U, V de la vitesse moyenne sur chaque verticale, ces trois équations (11) détermineront à une première approximation, d'instant en instant, les variations de U, V, ζ sur chaque

verticale (x, y). On en déduira donc, pour tout instant t : 1° la forme et la situation de la surface libre; 2° les vitesses moyennes U, V, qui, jointes aux valeurs initiales α, β, données dans chaque cas, de $u - U$, $v - V$, feront connaître sensiblement, pour les divers points de la masse fluide, les composantes horizontales u, v de la vitesse.

Quant à la composante verticale w, en observant que $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}$ vaut à fort peu près, d'après (10) et (9 *ter*), $\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy}$ et que, par suite, les équations (2) et (6) donnent

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{H}\frac{d(H-\zeta)}{dt}, \tag{11 bis}$$

il viendra, en multipliant celle-ci, (11 *bis*), par dz et intégrant, depuis $z = z$, jusqu'à la limite $z = H$ où $w = w_0$,

$$w = w_0 - \left(1 - \frac{z}{H}\right)\frac{d(H-\zeta)}{dt}.$$

Or, d'après (3), w_0 égale sensiblement $\frac{dH}{dt}$; car, les dérivées $\frac{dH}{d(x, y)}$ étant supposées au plus comparables à $\frac{d\zeta}{d(x, y)}$, les termes, $u_0\frac{dH}{dx}$, $v_0\frac{dH}{dy}$, de l'expression de w_0 autres que $\frac{dH}{dt}$, ne sont pas d'un ordre de petitesse moins élevé que les produits $u\frac{d\zeta}{dx}$, $v\frac{d\zeta}{dy}$ et disparaissent à côté du terme $\frac{d\zeta}{dt}$, de même que $u\frac{du}{dx}$, $v\frac{du}{dy}$ ont été négligés devant $\frac{du}{dt}$. On aura donc, pour calculer w, la formule approchée

$$w = \frac{dH}{dt} - \left(1 - \frac{z}{H}\right)\frac{d(H-\zeta)}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + \frac{z}{H}\frac{d(H-\zeta)}{dt}. \tag{12}$$

V. — Équations de deuxième approximation, pour les trois mêmes cas.

L'expression (12) de w nous permet actuellement d'évaluer les très petites accélérations verticales w'. On a, en effet,

$$w' = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}.$$

Or, le premier terme, $\frac{dw}{dt}$, est encore de l'ordre des produits des dérivées $\frac{dw}{d(x, y)}$ par des vitesses de propagation très supérieures à u, v: en sorte que ce premier terme rend insensibles les deux suivants. Et l'on peut également supprimer le dernier, $w\frac{dw}{dz}$ ou $-w\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)$, qui est aussi de l'ordre de $u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}$ pour ce fait que les rapports $\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ et $\frac{1}{w}\frac{dw}{dx}$, $\frac{1}{v}\frac{dv}{dy}$ et $\frac{1}{w}\frac{dw}{dy}$ sont comparables entre eux, les quantités u, v, w se propageant, pour ainsi dire, autant les unes que les autres, suivant les x ou les y. On peut donc poser $w'=\frac{dw}{dt}$; et la formule (12) donne, en y négligeant le produit des deux petites dérivées premières $\frac{dH}{dt}$, $\frac{d(H-\zeta)}{dt}$ et de $\frac{1}{H}$, à côté de la dérivée seconde $\frac{d^2(H-\zeta)}{dt^2}$,

$$w'=\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{z}{H}\frac{d^2(H-\zeta)}{dt^2}. \tag{13}$$

Par suite, dans la formule (7) de la pression, le terme de deuxième approximation $-\int_\zeta^z w'\,dz$ a pour valeur approchée

$$-(z-\zeta)\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\frac{z^2-\zeta^2}{2H}\frac{d^2(H-\zeta)}{dt^2};$$

et il vient sensiblement, vu que z, comparable à H, est très supérieur à ζ,

$$\int_\zeta^z w'\,dz=z\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{z^2}{2H}\frac{d^2(H-\zeta)}{dt^2}. \tag{13 bis}$$

La formule (7) s'écrira donc

$$\frac{p}{\rho}=\frac{p_1}{\rho}+g(z-\zeta)-z\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\frac{z^2}{2H}\frac{d^2(H-\zeta)}{dt^2}. \tag{14}$$

Les deux derniers termes représentent, comme on voit, la petite partie de la pression qui, le long d'une verticale, ne varie pas d'après la loi hydrostatique.

La valeur (13 *bis*) de $\int_\zeta^z w'\,dz$, différentiée par rapport à x ou à y

en négligeant, à côté des dérivées troisièmes $\frac{d^3(\mathrm{H}-\zeta)}{dt^2 d(x,y)}$, les produits de la dérivée seconde $\frac{d^2(\mathrm{H}-\zeta)}{dt^2}$ par les dérivées premières $\frac{d\mathrm{H}}{d(x,y)}$ et par $\frac{1}{\mathrm{H}}$, change de même les équations (8) en celles-ci :

$$(15)\quad \begin{cases} u' = g\dfrac{d}{dx}\left(\zeta - \dfrac{p_1}{\rho g}\right) + z\dfrac{d^3\zeta}{dt^2 dx} + \dfrac{z^2}{2\mathrm{H}}\dfrac{d^3(\mathrm{H}-\zeta)}{dt^2 dx}, \\ v' = g\dfrac{d}{dy}\left(\zeta - \dfrac{p_1}{\rho g}\right) + z\dfrac{d^3\zeta}{dt^2 dy} + \dfrac{z^2}{2\mathrm{H}}\dfrac{d^3(\mathrm{H}-\zeta)}{dt^2 dy}. \end{cases}$$

Multiplions-les par $\frac{dz}{\mathrm{H}-\zeta}$ et intégrons sur toute la profondeur $\mathrm{H}-\zeta$ du fluide, c'est-à-dire de $z=\zeta$ à $z=\mathrm{H}$, en remarquant que les derniers et avant-derniers termes, de seconde approximation, ne seront changés que de fractions négligeables de leurs valeurs si l'on y remplace cet intervalle $\mathrm{H}-\zeta$ par H, ou la limite ζ par zéro. Nous aurons

$$(16)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\zeta^{\mathrm{H}} u'\frac{dz}{\mathrm{H}-\zeta} = g\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \frac{\mathrm{H}}{6}\frac{d^3(2\zeta+\mathrm{H})}{dt^2 dx}, \\ \displaystyle\int_\zeta^{\mathrm{H}} v'\frac{dz}{\mathrm{H}-\zeta} = g\frac{d}{dy}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right) + \frac{\mathrm{H}}{6}\frac{d^3(2\zeta+\mathrm{H})}{dt^2 dy}. \end{cases}$$

Pour calculer les premiers membres de ces équations, c'est-à-dire les valeurs moyennes des accélérations horizontales u', v' le long d'une même verticale, observons que, dans l'expression de u',

$$u' = \frac{du}{dt} + w\frac{du}{dz} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy},$$

les trois derniers termes, qui sont de deuxième approximation, peuvent s'évaluer en y mettant, si l'on veut, pour u, v et w, leurs expressions approchées (10) et (12). Il vient d'abord, pour les deux derniers de ces termes,

$$u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} = (\mathrm{U}+\alpha)\left(\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\alpha}{dx}\right) + (\mathrm{V}+\beta)\left(\frac{d\mathrm{U}}{dy} + \frac{d\alpha}{dy}\right).$$

Multiplions par $\frac{dz}{\mathrm{H}-\zeta}$ ou, sensiblement, par $\frac{dz}{\mathrm{H}}$, et intégrons sur toute

la profondeur du fluide, c'est-à-dire, à fort peu près, de $z = 0$ à $z = \mathrm{H}$. Si nous développons les produits du second membre et que nous tenions compte des relations (9 *bis*), ainsi que des conditions évidentes

$$\int_0^{\mathrm{H}} \alpha \frac{dz}{\mathrm{H}} = 0, \quad \int_0^{\mathrm{H}} \beta \frac{dz}{\mathrm{H}} = 0,$$

$$\frac{d}{d(x, y)} \int_0^{\mathrm{H}} \alpha \frac{dz}{\mathrm{H}} = 0 \quad \text{ou} \quad \int_0^{\mathrm{H}} \frac{d\alpha}{d(x, y)} \frac{dz}{\mathrm{H}} = 0,$$

toujours vérifiées, même les dernières, quand les quantités α et β existent (car H est alors supposé constant), nous aurons

$$\int_\zeta^{\mathrm{H}} \left(u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} \right) \frac{dz}{\mathrm{H} - \zeta} = \mathrm{U} \frac{d\mathrm{U}}{dx} + \mathrm{V} \frac{d\mathrm{U}}{dy}.$$

Quant au terme $w \frac{du}{dz}$, si l'on y remplace w, d'après (12), par

$$\frac{d\zeta}{dt} + \frac{z}{\mathrm{H}} \frac{d(\mathrm{H} - \zeta)}{dt}$$

et $\frac{du}{dz}$ par $\frac{d(u - \mathrm{U})}{dz}$, sa moyenne, $\frac{1}{\mathrm{H} - \zeta} \int_\zeta^{\mathrm{H}} w \frac{du}{dz} dz$, sera

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\mathrm{H} - \zeta} \int_\zeta^{\mathrm{H}} \left[\frac{d\zeta}{dt} + \frac{z}{\mathrm{H}} \frac{d(\mathrm{H} - \zeta)}{dt} \right] \frac{d(u - \mathrm{U})}{dz} dz \\ & = \frac{1}{\mathrm{H} - \zeta} \int_\zeta^{\mathrm{H}} \frac{d}{dz} \left[(u - \mathrm{U}) \frac{d\zeta}{dt} + (u - \mathrm{U}) \frac{z}{\mathrm{H}} \frac{d(\mathrm{H} - \zeta)}{dt} \right] dz \\ & \quad - \frac{1}{\mathrm{H}} \frac{d(\mathrm{H} - \zeta)}{dt} \int_\zeta^{\mathrm{H}} (u - \mathrm{U}) \frac{dz}{\mathrm{H} - \zeta}. \end{aligned} \right.$$

Or la première intégrale du second membre s'obtient immédiatement et a pour valeur, après des réductions évidentes,

$$(u_0 - \mathrm{U}) \frac{d\mathrm{H}}{dt} - (u_1 - \mathrm{U}) \left[\frac{d\zeta}{dt} + \frac{\zeta}{\mathrm{H}} \frac{d(\mathrm{H} - \zeta)}{dt} \right],$$

ou, simplement,

$$(u_0 - \mathrm{U}) \frac{d\mathrm{H}}{dt} - (u_1 - \mathrm{U}) \frac{d\zeta}{dt}.$$

vu que le petit facteur $\frac{\zeta}{H}$ rend le produit $-(u_1 - U)\frac{\zeta}{H}\frac{d(H-\zeta)}{dt}$ négligeable à côté du terme $-(u_1 - U)\frac{d\zeta}{dt}$, qui est déjà de seconde approximation. Celui-ci, en effet, se trouvant, dans (17), divisé par $H - \zeta$, est de l'ordre de $\frac{d\zeta}{dt}\frac{u_1 - U}{H}$, ou, évidemment, de $\frac{d\zeta}{dt}\frac{du}{dz}$, c'est-à-dire, enfin, d'après (12), comparable au terme même $w\frac{du}{dz}$, dont on a démontré la petitesse relative, dans u', en comparaison de $\frac{du}{dt}$. Comme, d'autre part, le dernier terme de (17) est identiquement nul d'après la définition même de U, il vient, pour la valeur moyenne de la somme $\frac{du}{dt} + w\frac{du}{dz}$, en groupant deux parties de terme affectées de U, l'expression

$$\frac{1}{H-\zeta}\left[\int_\zeta^H \frac{du}{dt}\,dz + u_0\frac{dH}{dt} - u_1\frac{d\zeta}{dt} - U\frac{d(H-\zeta)}{dt}\right].$$

Mais, d'après la règle classique de la différentiation des intégrales définies, la somme

$$\int_\zeta^H \frac{du}{dt}\,dz + u_0\frac{dH}{dt} - u_1\frac{d\zeta}{dt}$$

n'est autre chose que

$$\frac{d}{dt}\int_\zeta^H u\,dz = \frac{d(H-\zeta)U}{dt} = (H-\zeta)\frac{dU}{dt} + U\frac{d(H-\zeta)}{dt};$$

et l'on a finalement, pour la valeur moyenne de $\frac{du}{dt} + w\frac{du}{dz}$, la simple dérivée $\frac{dU}{dt}$.

Il viendra donc, en définitive, comme valeur moyenne de u' le long d'une même verticale,

$$\int_\zeta^H u'\frac{dz}{H-\zeta} = \frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx} + V\frac{dU}{dy}. \tag{18}$$

On trouverait de même

$$\int_\zeta^H v'\frac{dz}{H-\zeta} = \frac{dV}{dt} + U\frac{dV}{dx} + V\frac{dV}{dy}. \tag{18 bis}$$

Par suite, si l'on appelle, afin d'abréger, I et I′ les deux *pentes motrices* suivant les deux axes rectangulaires des x et des y,

$$(19)\qquad \mathrm{I} = \frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right), \quad \mathrm{I}' = \frac{d}{dy}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right),$$

les deux relations (16) prendront les formes

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathrm{I} = \dfrac{1}{g}\left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dt} + \mathrm{U}\dfrac{d\mathrm{U}}{dx} + \mathrm{V}\dfrac{d\mathrm{U}}{dy}\right) - \dfrac{\mathrm{H}}{6g}\dfrac{d^3(2\zeta + \mathrm{H})}{dt^2\,dx}, \\ \mathrm{I}' = \dfrac{1}{g}\left(\dfrac{d\mathrm{V}}{dt} + \mathrm{U}\dfrac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{V}\dfrac{d\mathrm{V}}{dy}\right) - \dfrac{\mathrm{H}}{6g}\dfrac{d^3(2\zeta + \mathrm{H})}{dt^2\,dy}. \end{cases}$$

Voilà ce que deviennent, à une deuxième approximation, les équations qui, jointes à celle, (5), de conservation des volumes fluides, permettront de déterminer les accroissements éprouvés, d'un instant à l'autre, par les trois principales inconnues du problème, qui sont d'ordinaire ζ, U et V, fonctions des deux coordonnées horizontales x, y et du temps t.

Quand la pression p_1 à la surface est constante, I et I′ se réduisent à $\frac{d\zeta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dy}$. Si, de plus, le fond est fixe et peut être supposé horizontal sur des étendues notables, on n'a que des pentes insignifiantes par rapport à celles que le mouvement ondulatoire imprime à la surface, en appelant h le petit excédent variable de la profondeur actuelle $\mathrm{H} - \zeta$ sur la profondeur constante H antérieure aux ondes étudiées, il viendra $\zeta = -h$, et les trois équations (5) et (20) pourront aisément s'écrire

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} + \mathrm{H}\left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dx} + \dfrac{d\mathrm{V}}{dy}\right) + \dfrac{dh\mathrm{U}}{dx} + \dfrac{dh\mathrm{V}}{dy} = 0; \\ \dfrac{d\mathrm{U}}{dt} + g\dfrac{dh}{dx} + \mathrm{U}\dfrac{d\mathrm{U}}{dx} + \mathrm{V}\dfrac{d\mathrm{U}}{dy} + \dfrac{\mathrm{H}}{3}\dfrac{d^3h}{dt^2\,dx} = 0, \\ \dfrac{d\mathrm{V}}{dt} + g\dfrac{dh}{dy} + \mathrm{U}\dfrac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{V}\dfrac{d\mathrm{V}}{dy} + \dfrac{\mathrm{H}}{3}\dfrac{d^3h}{dt^2\,dy} = 0. \end{cases}$$

VI. — Ce qu'elles deviennent, quand il s'agit d'un canal sensiblement rectangulaire, d'une largeur bien moindre que la longueur des ondes.

Concevons qu'il s'agisse d'étudier en particulier des ondes produites ou propagées le long d'un canal ayant pour axe l'axe même des x, et d'une largeur constante l. Nous supposerons cette largeur horizontale sensiblement la même de la surface au fond : autrement dit, nous admettrons que la section normale du canal ait ou la forme d'un rectangle, ou du moins, à peu près, celle d'un trapèze à bases horizontales et beaucoup plus large que haut. Alors la vitesse latérale V devra s'annuler, soit en toute rigueur, soit très sensiblement, sur les deux bords, ou très près des bords, quand même ceux-ci ne seraient pas verticaux; car, les trajectoires étant supposées peu inclinées sur l'horizon et le canal se trouvant prismatique a arêtes horizontales, les molécules fluides contiguës aux bords ne peuvent y décrire que des lignes s'écartant peu des génératrices ou sensiblement perpendiculaires à l'axe des y.

Donc la composante transversale V s'annulera, ou à fort peu près, sur les deux côtés du canal, et elle devra, vu la graduelle variation supposée de h, U, V en fonction de t, x et y, être partout d'un ordre de petitesse supérieur à celui de la composante longitudinale U : celle-ci, en effet, s'annulera seulement à des intervalles beaucoup plus longs que la largeur l. Par suite, $\frac{dV}{dt}$ pourra être négligé devant $\frac{dU}{dt}$; et les deux dernières équations (21), qui donnent, à une première approximation,

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}, \quad \frac{dh}{dy} = -\frac{1}{g}\frac{dV}{dt},$$

montrent que la dérivée $\frac{dh}{dy}$ devra être insensible par rapport à la dérivée $\frac{dh}{dx}$, ou que les pentes de la surface seront beaucoup plus faibles dans le sens transversal des y que dans le sens longitudinal des x.

Les dénivellations dans le sens transversal se trouvent ainsi né-

gligeables, au moins à une première approximation, et h, $\frac{dh}{dx}$, $\frac{dh}{dt}$ ont presque les mêmes valeurs d'un bord à l'autre ou ne dépendent que très peu de y. De plus, V s'annulant ou devenant insensible sur les deux bords, sa dérivée $\frac{dV}{dy}$ s'annule dans l'intervalle, pour toutes les valeurs de x, et elle ne pourra être que fort petite en général à côté de $\frac{dU}{dx}$ qui, au contraire, ne s'annule que de loin en loin le long du canal. Il suit de là que, à une première approximation, la première équation (21) donnera $\frac{dU}{dx}$ sensiblement égal à $-\frac{1}{H}\frac{dh}{dt}$ et, par suite, presque pareil, comme $\frac{dh}{dx}$, d'un bord à l'autre.

Même parmi les termes de deuxième approximation, le terme $V\frac{dU}{dy}$ sera, dans la seconde relation (21), rendu insensible à côté du précédent $U\frac{dU}{dx}$, par cette circonstance que V est très petit en comparaison de U, et, dans la première (21), le terme $\frac{dhV}{dy}$ se trouvera négligeable devant le précédent $\frac{dhU}{dx}$, car, hV s'annulant, comme V, sur les deux bords, sa dérivée en y s'annule dans l'intervalle, comme le fait celle de V, et elle est par suite, en général, très petite à côté de la dérivée en x de la quantité hU, beaucoup plus grande d'ailleurs que hV.

En résumé, dans le cas d'un canal de largeur et de profondeur constantes, les deux premières équations (21) se réduisent généralement, pour les longues ondes qu'on veut étudier, à celles-ci :

$$(22)\quad \begin{cases} \frac{dh}{dt} + H\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy}\right) + \frac{dhU}{dx} = 0, \\ \frac{dU}{dt} + g\frac{dh}{dx} + U\frac{dU}{dx} + \frac{H}{3}\frac{d^3h}{dt^2dx} = 0. \end{cases}$$

La composante transversale V de la vitesse n'y paraît que par le terme $H\frac{dV}{dy}$, lequel n'est tout au plus, comme on a vu, que de seconde approximation. On l'élimine, et l'on se débarrasse tout à fait, en même temps, de la variable y, en introduisant pour inconnues, au lieu de U et de h, les moyennes de leurs valeurs sur toute la largeur d'une section transversale, largeur qui sera, exactement ou à fort peu près,

la distance l des deux verticales menées, dans la section même, à partir du fond, aux points de départ des deux bords (supposés en talus).

Dans ce but, multiplions les deux relations (22) par $\frac{dy}{l}$ et intégrons sur toute la distance l, ou pour toute la longueur constante de la base inférieure de la section, en observant : 1° que les intégrales $\int h\,dy$, $\int U\,dy$ se différentieront évidemment sous le signe $\int$, par rapport à x ou à t; 2° que l'intégrale $\int \frac{dV}{dy}\,dy$ vaudra la différence, toujours négligeable, des deux valeurs de V sur les verticales menées aux deux bords en partant du fond, valeurs nulles ou insensibles; 3° et que, enfin, les facteurs $\frac{dh}{dx}$, $\frac{dU}{dx}$, peu variables d'un bord à l'autre, comme on a vu, peuvent être remplacés, dans les termes de deuxième approximation, par leurs moyennes $\frac{d}{dx}\int h\frac{dy}{l}$, $\frac{d}{dx}\int U\frac{dy}{l}$. Il viendra, si l'on a soin de mettre provisoirement $h\frac{dU}{dx} + U\frac{dh}{dx}$ au lieu de $\frac{dhU}{dx}$ pour réduire finalement de nouveau, dans le résultat, ces deux termes en un seul :

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int h\frac{dy}{l} + H\frac{d}{dx}\int U\frac{dy}{l} + \frac{d}{dx}\left(\int h\frac{dy}{l}\int U\frac{dy}{l}\right) = 0,\\ &\frac{d}{dt}\int U\frac{dy}{l} + g\frac{d}{dx}\int h\frac{dy}{l}\\ &\quad + \left(\int U\frac{dy}{l}\right)\frac{d}{dx}\left(\int U\frac{dy}{l}\right) + \frac{H}{3}\frac{d^3}{dt^2\,dx}\int h\frac{dy}{l} = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations, sauf la substitution à h et U de leurs moyennes sur toute la largeur, sont identiques à celles qu'on aurait déduites immédiatement des relations (21) ou (22), en supposant les mouvements exactement pareils d'un bord à l'autre, c'est-à-dire en prenant V nul et h, U indépendants de y. Donc on pourra, *même à une deuxième approximation*, dans l'étude de mouvements propagés le long du canal, faire ces hypothèses simplificatrices, ou poser les équations indéfinies

$$(24)\quad \frac{dh}{dt} + H\frac{dU}{dx} + \frac{dhU}{dx} = 0,\quad \frac{dU}{dt} + g\frac{dh}{dx} + U\frac{dU}{dx} + \frac{H}{3}\frac{d^3h}{dt^2\,dx} = 0.$$

Mais il sera bien entendu que, dans ces relations, h désigne la

hauteur effective *moyenne* du fluide, au-dessus de son niveau primitif de repos ou de régime uniforme, sur toute la largeur de la section transversale définie par l'abscisse x, et que U y désigne, non pas la moyenne des valeurs que reçoit, le long d'une verticale unique, la composante de la vitesse suivant le sens longitudinal des x, mais bien la valeur (parfois très différente) obtenue en considérant ces vitesses longitudinales moyennes sur une infinité de verticales équidistantes, menées d'un bord à l'autre de la section, et en divisant leur somme par leur nombre.

On peut observer, du reste, que cette moyenne générale

$$\int U \frac{dy}{l} \quad \text{ou} \quad \int \frac{dy}{l} \int u \frac{dz}{H+h}$$

se confond, même à une deuxième approximation, avec ce qu'on nomme la *vitesse moyenne de débit*, c'est-à-dire avec la valeur moyenne de u sur toute l'étendue de la section, quotient du débit actuel de celle-ci, $\int dy \int u\,dz = \int U(H+h)\,dy$, par son aire $\int dy \int dz = \int (H+h)\,dy$. Appelons, en effet, pour fixer les idées, h_1 la moyenne des valeurs *très peu différentes* que prend h d'un bord à l'autre, en sorte qu'on ait

$$\int (H+h)\,dy = (H+h_1)\,l\,:$$

le quotient à évaluer, ou la vitesse de débit, sera $\frac{\int U(H+h)\,dy}{(H+h_1)\,l}$. Or, si l'on observe que, h et h_1 étant petits devant H, le rapport $\frac{H+h}{H+h_1}$ vaut sensiblement $1 + \frac{h-h_1}{H}$, ce quotient devient

$$\int U\left(1 + \frac{h-h_1}{H}\right)\frac{dy}{l} = \int U \frac{dy}{l} + \int U \frac{h-h_1}{H}\frac{dy}{l},$$

et l'on voit que le terme $\int U \frac{h-h_1}{H}\frac{dy}{l}$, où $h-h_1$ n'est qu'une petite fraction de h_1, n'égale pas même, à côté de U, une quantité de deuxième approximation, laquelle se trouverait comparable au produit de U par le petit rapport $\frac{h}{H}$.

Dans le cas où, antérieurement à l'arrivée des ondes, le fluide serait en mouvement suivant le sens des x, par filets rectilignes et parallèles

animés de petites vitesses quelconques, il y aurait avantage, en vue de simplifier les résultats des intégrations ultérieures, à concevoir le lit du canal et les axes des x, y, z, ou l'observateur, animés de la moyenne de ces vitesses, translation rectiligne et uniforme qui ne changerait pas le phénomène, ni la forme de ses équations différentielles (car, fût-elle effective, elle ne ferait que modifier dans une mesure finie les frottements extérieurs dont on ne tient pas compte), et qui aurait cependant l'avantage de donner $\int U \frac{dy}{l} = 0$ aux endroits, non encore atteints par le mouvement ondulatoire, où la profondeur n'aurait pas cessé d'être égale à H. Et l'on voit que, alors, rien, dans les équations (23) ou (24) du mouvement non plus que dans les circonstances initiales concernant la vitesse moyenne et la profondeur, ne différencierait le fluide considéré d'avec un liquide primitivement en repos. Ainsi, *pour tout ce qui concerne la propagation et les déformations successives des ondes de translation, dans un canal rectangulaire dont l'eau s'écoule par filets rectilignes et parallèles, inégalement rapides, animés de vitesses du même ordre que celles que produisent ces ondes, ou très petites par rapport aux vitesses de propagation, les lois de première et de deuxième approximation sont les mêmes que lorsqu'il s'agit d'ondes propagées le long d'une pareille masse fluide en repos ou, du moins, n'ayant qu'un mouvement commun de transport, d'une vitesse égale à la vitesse moyenne des filets considérés.* Il n'y a de différence qu'en ce que ces lois doivent s'appliquer moins longtemps, d'après une remarque de la fin du n° III (p. 282). Seules les trajectoires des molécules fluides sont moins simples, parce que les inégalités de vitesse des divers filets ne permettent pas de supposer, à une première approximation, que le mouvement se fasse par tranches verticales, perpendiculaires à l'axe du canal, et conservant leur verticalité durant leur transport et leurs déformations.

VII. — Cas des longues ondes dont la courbure est très faible et qui sont produites ou propagées le long d'un canal non rectangulaire sensiblement prismatique.

Nous continuerons à admettre ici que l'un des axes horizontaux des x et des y, celui des x par exemple, soit choisi à peu près parallèle aux

parois du canal, et nous supposerons insensibles les composantes transversales v', w' des accélérations, hypothèse admissible pour les ondes très longues et, par conséquent, très peu courbes, où le mouvement est presque exclusivement longitudinal. Il est évident que les équations indéfinies (1) du mouvement subsisteront toujours. La première donnera, en appelant encore p_1 la pression à la surface libre (pression que nous supposerons la même d'un bord à l'autre ou indépendante de y), et ζ l'ordonnée de cette surface :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + g(z - \zeta); \tag{25}$$

et celle-ci réduira la seconde (1), où v' sera négligeable, à $\frac{d\zeta}{dy} = 0$. Donc, l'ordonnée ζ de la surface libre ne dépendra, comme p_1, que de x et de t. Autrement dit, *le profil en travers de la surface libre sera horizontal, et la pression variera hydrostatiquement aux divers points d'une même section normale du canal.*

Il en résulte que la première (1), devenue, en vertu de (25),

$$u' = g\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right), \tag{26}$$

donnera à l'accélération longitudinale u' les mêmes valeurs pour toutes les molécules ayant actuellement la même abscisse x. Donc, en raisonnant comme on l'a fait plus haut (n°s III et IV, p. 279 à 282), dans le cas d'un bassin à fond sensiblement horizontal, et en appelant U la moyenne des valeurs de u sur toute l'étendue σ d'une section fluide normale aux x, on en conclura que la différence $u - \mathrm{U}$ est très petite en comparaison de U, si le liquide considéré était d'abord en repos ou si le mouvement est principalement oscillatoire, et qu'elle se trouve, du moins, à fort peu près indépendante de x et de t, quand il s'agit d'ondes propagées dans une eau qui s'écoule le long du canal par filets inégalement rapides parallèles à l'axe des x. Dans tous ces cas, des deux termes, $u - \mathrm{U}$ et U, qui composent l'expression de u, le premier, $u - \mathrm{U}$, que j'appellerai α, est seul fonction des coordonnées transversales y et z, mais, par contre, dépend fort peu de x et de t, contrairement au second U.

Cela posé, cherchons en premier lieu quelle relation existe, en vertu

de la continuité ou de la conservation des volumes fluides, entre la vitesse moyenne U sur une section et l'aire σ de cette section fluide, ou leurs dérivées. On l'obtient de suite, en exprimant que l'accroissement $\frac{d\sigma}{dt}\,dt\,dx$, durant un instant dt, du volume fluide $\sigma\,dx$ compris entre les sections normales qui correspondent aux deux abscisses fixes x, $x + dx$, est égal à l'excédent du volume, $\sigma U\,dt$, débité en même temps par la première de ces sections, sur celui, $\left(\sigma U + \frac{d\sigma U}{dx}dx\right)dt$, qu'a débité la seconde. Il vient ainsi

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\sigma U}{dx} = 0, \tag{27}$$

formule dont on remarquera l'analogie avec les autres équations de conservation des volumes fluides, (5) et (24), que nous avons obtenues pour les cas d'un bassin où la profondeur est $H - \zeta$ et d'un canal rectangulaire d'une largeur constante l et d'une hauteur d'eau, $H + h$, ayant comme partie variable h.

Évaluons enfin, pour en porter dans (26) l'expression en fonction de U, σ et leurs dérivées, l'accélération u' commune à toutes les particules situées actuellement sur une même section normale σ ou, plutôt, dans une même tranche élémentaire d'épaisseur dx ayant la masse $\rho\sigma\,dx$. Pendant un instant dt, cette accélération accroît de $(\rho\sigma\,dx)(u'\,dt)$ la quantité de mouvement animant suivant les x la matière de la tranche. Il nous suffira donc d'obtenir, en fonction de U, σ ou leurs dérivées, une expression de la même quantité acquise de mouvement, puis de l'égaler à $\rho\sigma\,u'\,dx\,dt$, pour que u' s'en déduise.

A cet effet, considérons d'abord la masse fluide comprise, à l'époque t, entre deux sections σ_0, σ_1, ayant deux abscisses respectives fixes x_0, x_1, dont la seconde sera supposée la plus grande. Si nous représentons par $\int_\sigma$ une intégrale prise sur toute l'étendue d'une section déterminée σ, cette masse fluide vaudra évidemment $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_\sigma \rho\,d\sigma$, et la quantité de mouvement qu'elle possède dans le sens des x, à l'époque t, égalera de même $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_\sigma \rho u\,d\sigma$. A l'époque $t + dt$, la quantité analogue de

mouvement sera donc, pour la matière comprise alors entre les deux mêmes abscisses ou les deux mêmes plans extrêmes,

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\left(\int_\sigma \rho u\, d\sigma + dt\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho u\, d\sigma\right) = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_\sigma \rho u\, d\sigma + dt\int_{x_0}^{x_1} dx \frac{d}{dt}\int_\sigma \rho u\, d\sigma.$$

Mais, par les divers éléments $d\sigma$ de la section σ_1, il sera sorti, durant l'intervalle écoulé dt, de petits prismes fluides, $(d\sigma)(u\,dt)$, emportant la quantité de mouvement $\rho(d\sigma)(u\,dt)u$, c'est-à-dire, en tout, $dt\int_{\sigma_1} \rho u^2\, d\sigma$, qu'il y a lieu de joindre à la précédente, puisque ces prismes fluides font partie de la masse dont on a à s'occuper; et, d'autre part, il sera entré, au contraire, par la section σ_0, une masse fluide étrangère, apportant une quantité de mouvement exprimée de même par $dt\int_{\sigma_0} \rho u^2\, d\sigma$, qui est à retrancher. En somme, la quantité de mouvement gagnée, durant l'instant dt, par la tranche fluide

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_\sigma \rho\, d\sigma,$$

aura donc pour expression

$$dt\left(\int_{x_0}^{x_1} dx \frac{d}{dt}\int_\sigma \rho u\, d\sigma + \int_{\sigma_1} \rho u^2\, d\sigma - \int_{\sigma_0} \rho u^2\, d\sigma\right),$$

laquelle peut s'écrire évidemment

$$dt\, dx\left[\frac{d}{dt}\int_\sigma \rho u\, d\sigma + \frac{d}{dx}\int_\sigma \rho u^2\, d\sigma\right]$$

quand l'épaisseur $x_1 - x_0$ de la tranche se réduit à dx et que les deux abscisses x_0, x_1 deviennent x, $x + dx$. Telle est la quantité qu'il faut égaler à $\rho\sigma u'\, dx\, dt$. Observons que, le fluide étant un liquide homogène, le facteur ρ, constant, sort des signes d'intégration ou de ceux de différentiation, et il viendra simplement

$$(28) \qquad u' = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{d}{dt}\int_\sigma u\, d\sigma + \frac{d}{dx}\int_\sigma u^2\, d\sigma\right).$$

Or, d'une part, $\int_\sigma u\,d\sigma = U\sigma$; d'autre part, comme

$$u^2 = (U + \alpha)^2 = U^2 + 2U\alpha + \alpha^2,$$

et que $\int_\sigma \alpha\,d\sigma$ s'annule identiquement, vu que

$$\int_\sigma \alpha\,d\sigma = \int_\sigma (u - U)\,d\sigma = \int_\sigma u\,d\sigma - U\sigma,$$

l'expression $\int_\sigma u^2\,d\sigma$, ou $\int_\sigma U^2\,d\sigma + 2\int_\sigma U\alpha\,d\sigma + \int_\sigma \alpha^2\,d\sigma$, se réduit à $U^2\sigma + \int_\sigma \alpha^2\,d\sigma$, somme où le second terme, généralement du même ordre que le premier, varie en fonction de x et t incomparablement moins que celui-ci, car α n'y dépend presque que de y et z, et σ n'y diffère que peu de la section fluide constante primitive. La dérivée $\frac{d}{dx}\int_\sigma u^2\,d\sigma$ se réduira donc sensiblement à $\frac{dU^2\sigma}{dx}$, et comme celle-ci, de l'ordre de $\frac{dU^2}{dx}$ ou de $U\frac{dU}{dx}$, après qu'on l'a divisée par σ, n'est à considérer, dans les formules (28) et (26), qu'à une deuxième approximation, on pourra négliger absolument la dérivée en x du terme $\int_\sigma \alpha^2\,d\sigma$. Ainsi, l'expression de l'accélération u' sera

$$(28\ bis) \qquad u' = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{dU\sigma}{dt} + \frac{dU^2\sigma}{dx}\right).$$

Or, en y regardant $U\sigma$ et $U^2\sigma$ comme les produits respectifs de U par σ et par $U\sigma$, il vient

$$\frac{dU\sigma}{dt} + \frac{dU^2\sigma}{dx} = U\left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\sigma U}{dx}\right) + \sigma\left(\frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx}\right),$$

relation où la première partie du second membre est identiquement nulle en vertu de (27). Par suite, l'expression définitive, aussi simpli-

fiée que possible, de u',

$$u' = \frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx}, \tag{29}$$

est, à une première et à une deuxième approximation, la même que dans le cas où tous les filets fluides possèdent une vitesse initiale commune et où le mouvement se fait par tranches verticales conservant leur parallélisme.

En conséquence, les deux équations du mouvement en U et σ seront, d'après (27) et (26), si l'on appelle, pour abréger, I la *pente motrice* $\frac{d}{dx}\left(\zeta - \frac{p_1}{\rho g}\right)$,

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\sigma U}{dx} = 0, \quad I = \frac{1}{g}\left(\frac{dU}{dt} + U\frac{dU}{dx}\right). \tag{30}$$

On voit qu'elles ne gardent pas trace de l'inégalité de vitesse des filets fluides que le mouvement ondulatoire vient agiter; de sorte qu'*on pourra, dans ce cas d'un canal prismatique quelconque, comme dans celui d'un canal rectangulaire, étendre les lois des ondes de translation propagées au sein d'une eau en repos aux ondes qui le sont le long d'un courant, pourvu, du moins, qu'elles se trouvent être de courbure insensible, ou très longues, c'est-à-dire telles, que les accélérations latérales v', w' n'y aient aucun effet appréciable, et pourvu que les différences initiales de vitesse des divers filets fluides y soient seulement de l'ordre des vitesses mêmes qu'apportent les ondes, ou bien moindres que les vitesses de propagation*. Toutefois, encore d'après une remarque de la fin du n° III (p. 282), ces lois doivent y être un peu moins exactes que pour une eau en repos, ou ne pas s'appliquer aussi longtemps; et, d'ailleurs, l'inégalité de vitesse des filets fluides s'y fait sentir sur la forme des trajectoires des molécules liquides, qu'elle rend moins simples.

On peut voir dans l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 281 à 299, 465 à 470, et *Additions* à cet *Essai*, p. 51 à 53, 58 à 59, etc.) comment les équations (30) permettent d'étudier les longues ondes, non périodiques ou périodiques, propagées le long de canaux prismatiques ou quasi prismatiques, et même le long de tuyaux élastiques pleins de liquide. La superposition de deux *houles* égales et de sens

contraires y donnerait d'ailleurs des *clapotis*, comme on l'explique dans le même *Essai* (p. 334 et 335) pour le cas où le fluide est contenu dans un bassin de profondeur constante; et la combinaison de clapotis de diverses périodes, multiples les unes des autres, représenterait tous les petits mouvements longitudinaux possibles de l'eau contenue dans un canal prismatique limité à ses deux bouts par deux parois normales à son axe (même *Essai*, p. 314, 325, etc.) Je me contenterai de ces indications, car mon but n'était ici que de démontrer les équations différentielles régissant les longues ondes, dites de *translation*, produites ou propagées au sein des liquides pesants [1].

---

[1] *Voir*, à la fin du Volume, une *Addition* à ce Mémoire.

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski

(QUATRIÈME NOTE);

PAR M. É. WEST.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES OU AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES.

Soit y une fonction de ν variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$: supposons que ces quantités soient liées par une relation

$$\varphi(y) = 0, \tag{65}$$

qui contient aussi des différences ou des différentielles partielles de la fonction y, jusqu'à l'ordre μ inclusivement, et cherchons à déterminer généralement la valeur d'une fonction F de la quantité y considérée comme inconnue et donnée explicitement.

En suivant la marche que nous avons déjà indiquée, nous déterminerons une fonction w des variables indépendantes, se rapprochant autant que possible de la fonction y dans les limites que l'on considère, et la fonction cherchée sera donnée par l'expression (19), savoir :

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} F(y) = F(w) - \varphi(w)\frac{\left(\frac{dF(w)}{dw}\right)}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dw}\right)} \\ + \frac{1}{2}[\varphi(w)]^2 \frac{\left[\left(\frac{d\varphi(w)}{dw}\right)\left(\frac{d^2F(w)}{dw^2}\right) - \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2}\right)\left(\frac{dF(w)}{dw}\right)\right]}{\left(\frac{d\varphi(w)}{dw}\right)^3} - \ldots \end{aligned}\right.$$

Il ne figure ici que les dérivées des fonctions F et φ par rapport à la quantité w; la question se réduit ainsi au calcul de ces dérivées. On a donc

$$(67)\qquad \left(\frac{d\varphi(w)}{dw}\right) = \sum\left(\frac{d\varphi(w)}{dx_\alpha}\right)\frac{1}{\frac{dw}{dx_\alpha}},$$

$$(67)'\qquad \left(\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2}\right) = \sum\left(\frac{d^2\varphi(w)}{dx_\alpha dx_\beta}\right)\frac{1}{\frac{dw}{dx_\alpha}\frac{dw}{dx_\beta}} - \sum\left(\frac{d\varphi(w)}{dx_\alpha}\right)\left(\frac{d^2w}{dx_\alpha dx_\beta}\right)\frac{1}{\left(\frac{dw}{dx_\alpha}\right)^2\frac{dw}{dx_\beta}},$$

.....

Le développement de $(67)'$ s'obtient évidemment en faisant varier de 1 à ν les indices α et β, indépendamment l'un de l'autre.

Nous donnerons plus tard, d'après Wronski, l'expression générale de ces dérivées; pour l'instant les expressions (67), $(67)'$ suffisent; on saurait facilement déterminer la dérivée troisième, s'il était nécessaire.

En substituant les valeurs précédentes des dérivées de $\varphi(w)$, ainsi que les valeurs analogues de $F(w)$, dans l'expression (66), on a

$$(68)\qquad F(y) = F(w) - \varphi(w)\frac{\sum\left(\frac{dF(w)}{dx_\alpha}\right)\frac{1}{\frac{dw}{dx_\alpha}}}{\sum\left(\frac{d\varphi(w)}{dx_\alpha}\right)\frac{1}{\frac{dw}{dx_\alpha}}} + \ldots,$$

et l'on peut obtenir ainsi une fonction déterminée d'une intégrale de l'équation (65) supposée aux différences ou aux différentielles partielles. Nous allons maintenant achever les calculs.

Considérons une différence partielle de y d'un certain ordre ϖ; cette différence s'écrit

$$\Delta^{\varpi}_{x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_\nu^{\sigma_\nu}}y \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\Delta^{\varpi}y}{\Delta x_1^{\sigma_1}\Delta x_2^{\sigma_2}\ldots\Delta x_\nu^{\sigma_\nu}}\right)\Delta x_1^{\sigma_1}\Delta x_2^{\sigma_2}\ldots\Delta x_\nu^{\sigma_\nu},$$

en supposant

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi.$$

Il est préférable de choisir la seconde notation comme étant plus conforme à celle des différentielles, de sorte que, en supposant les

différences infiniment petites, on a, suivant la notation ordinaire,

$$\left(\frac{d^{\varpi} y}{dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}}\right) dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu};$$

la quantité entre parenthèses est alors le coefficient différentiel ou la dérivée partielle.

D'après cela, en ordonnant l'équation proposée par rapport aux différences ou aux dérivées partielles de l'inconnue, on aperçoit qu'elle se compose, pour les dérivées par exemple, de termes de la forme

$$\frac{d^{\varpi} y}{dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}} \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu),$$

$\Pi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$ désignant une certaine fonction des variables indépendantes, de l'inconnue et de ses dérivées partielles; ce coefficient Π peut être déterminé de plusieurs manières différentes : nous devons supposer ici que le choix a été fait de la manière la plus convenable par rapport à la question que l'on traite. Par suite, l'équation (65), qui est la réunion ou l'agrégat de tous ces termes, peut s'écrire

$$(69) \quad \mathrm{Agr}^{\mu}\left[\frac{d^{\varpi} y}{dx_1^{\sigma_1} dx_2^{\sigma_2} \ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}} \Pi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)\right] = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_\nu),$$

avec la condition

$$(69)' \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi,$$

équation indéterminée qui doit être satisfaite en nombres entiers positifs, ϖ variant de zéro à μ; ψ est une fonction composée uniquement des variables indépendantes.

Exemple. — Supposons $\mu = 2$ et $\nu = 3$, en appliquant la méthode de Hindenbourg à la résolution de l'équation indéterminée (69)', on successivement

$$\varpi = 0, \quad \varpi = 1, \quad \varpi = 2.$$

Pour $\varpi = 0$, on a

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0.$$

Pour $\varpi = 1$, on a

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1.$$

Pour $\varpi = 2$, on a

$$\sigma_1 = 2, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1,$$
$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 1,$$
$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 2.$$

L'agrégat développé dans cet ordre est

$$\begin{aligned} &y\mathrm{H}(0,0,0) + \frac{dy}{dx_1}\mathrm{H}(1,0,0) + \frac{dy}{dx_2}\mathrm{H}(0,1,0) + \frac{dy}{dx_3}\mathrm{H}(0,0,1) \\ &\quad + \frac{d^2y}{dx_1^2}\mathrm{H}(2,0,0) + \frac{d^2y}{dx_1dx_2}\mathrm{H}(1,1,0) + \frac{d^2y}{dx_1dx_3}\mathrm{H}(1,0,1) \\ &\quad + \frac{d^2y}{dx_2^2}\mathrm{H}(0,2,0) + \frac{d^2y}{dx_2dx_3}\mathrm{H}(0,1,1) + \frac{d^2y}{dx_3^2}\mathrm{H}(0,0,2). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant déterminer l'*équation transformée*, dans le cas général, par l'introduction d'une quantité arbitraire ω, savoir :

$$(70) \quad \mathrm{Agr}^{\mu}\frac{d^{\varpi}y}{dx_1^{\sigma_1}\ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}}\left[\frac{\mathrm{H}(\sigma_1\ldots\sigma_\nu)}{\mathrm{A}(\sigma_1\ldots\sigma_\nu)}\right]^{\omega}\mathrm{A}(\sigma_1\ldots\sigma_\nu) = \left[\frac{\psi(x_1\ldots x_\nu)}{\chi}\right]^{\omega}\chi,$$

avec la condition (69)' relative aux indices. Les quantités A sont des quantités constantes que l'on obtient en remplaçant les quantités variables des coefficients H par leurs *valeurs moyennes*, c'est-à-dire par des quantités constantes qui représentent aussi bien que possible les valeurs autour desquelles oscillent les quantités variables dans les limites que l'on considère. De cette façon, les quantités A sont respectivement les valeurs moyennes des coefficients H, ces lettres étant accompagnées de leurs indices, et χ est la valeur moyenne de $\psi(x_1\ldots x_\nu)$.

L'équation (70) est telle que, pour $\omega = 1$, on reproduit l'équation proposée, et pour $\omega = 0$, on obtient l'*équation réduite*

$$(71) \qquad \mathrm{Agr}^{\mu}\left[\frac{d^{\varpi} w}{dx_1^{\sigma_1}\ldots dx_y^{\sigma_y}}\,\Lambda(\sigma_1 \ldots \sigma_y)\right] = \chi,$$

avec la condition (69)'. Nous remplaçons ici la variable y par ϖ pour éviter de confondre les deux inconnues provenant d'équations différentes. L'équation (71) est une équation linéaire à coefficients constants, toujours intégrable par des moyens connus : il est donc évident que l'intégration de l'équation proposée (69), qui se déduit de celle de l'équation réduite (71), peut toujours être effectuée quelle que soit la manière dont les dérivées partielles entrent dans les coefficients. L'intégrale ainsi obtenue est l'intégrale générale de l'équation (69), car l'équation réduite (71) introduit μ fonctions arbitraires sans conditions particulières; c'est le caractère d'une intégrale générale, tandis que les intégrales singulières dépendent de certaines conditions spéciales. D'après cela, les intégrales singulières s'obtiendront en formant des équations réduites autres que l'équation (71), et l'on sera guidé dans cette formation par le problème proposé lui-même.

Il reste, pour terminer la question, à donner les formules d'intégration de l'équation linéaire à coefficients constants (71); nous ne pouvons d'autant moins nous en dispenser que ces formules sont peu usitées et qu'elles ne se trouvent guère que dans des Mémoires originaux.

On peut toujours supposer $\chi = 0$, dans l'équation (71), parce que l'inconnue ϖ déterminée dans ce cas ne diffère de l'inconnue provenant de la supposition χ différent de zéro que par un polynôme entier en $x_1, x_2, \ldots$ dont les coefficients sont de simples constantes, ou des constantes périodiques en considérant des différences finies. Si le coefficient de y n'est pas nul, le polynôme se réduit à une constante; si le coefficient de y est nul, le polynôme est du premier degré en $x_1, x_2, \ldots$: si de plus le coefficient de $\frac{dy}{dx_1}$ est nul, le polynôme contient en outre un terme en x_1^2, etc.

Cas des différences. — Soit donc l'équation linéaire à coefficients

constants et aux différences partielles d'ordre μ

$$(72)\qquad \mathrm{Agr}^{\mu}[\Delta^{\varpi}_{x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_\nu^{\sigma_\nu}}\varpi\,\mathrm{A}(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_\nu)] = 0,$$

avec la condition

$$(72)'\qquad \sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_\nu=\varpi,$$

ϖ variant de zéro à μ.

Formons, au moyen des coefficients de l'équation proposée, l'équation caractéristique

$$(73)\qquad \mathrm{B}_\mu n^\mu + \mathrm{B}_{\mu-1}n^{\mu-1}+\ldots+\mathrm{B}_0=0,$$

où les coefficients B sont composés de la manière suivante : notons par $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ les accroissements des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, accroissements que l'on écrit ordinairement $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_\nu$, et désignons par $p_2, p_3, \ldots p_\nu$, $\nu-1$ quantités arbitraires, en faisant, pour simplifier,

$$(74)\qquad p_2^{u_2}=q_2,\quad p_3^{u_3}=q_3,\quad \ldots,\quad p_\nu^{u_\nu}=q_\nu;$$

le coefficient général de l'équation caractéristique est alors

$$(75)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{B}_{\mu-\lambda} = {} & \mathrm{Agr}[(q_2-1)^{\sigma_2}(q_3-1)^{\sigma_3}\ldots(q_\nu-1)^{\sigma_\nu}\mathrm{A}(\mu-\lambda,\sigma_2\ldots\sigma_\nu)]\\ & -\frac{\mu-\lambda+1}{1}\mathrm{B}_{\mu-\lambda+1}+\frac{(\mu-\lambda+1)(\mu-\lambda+2)}{1.2}\mathrm{B}_{\mu-\lambda+2}-\ldots\\ & +(-1)^{\lambda}\frac{(\mu-\lambda+1)\ldots(\mu-1)\mu}{1.2\ldots\lambda}\mathrm{B}_\mu,\end{aligned}\right.$$

avec la condition relative à l'agrégat

$$(75)'\qquad \sigma_2+\sigma_3+\ldots+\sigma_\nu=\tau,$$

τ variant de zéro à λ. L'inconnue ϖ a ensuite pour expression :

$$(76)\qquad \varpi = \mathrm{S}[p_2^{\tau_2}p_3^{\tau_3}\ldots p_\nu^{\tau_\nu}(\mathrm{M}_1 n_1^{\zeta}+\mathrm{M}_2 n_2^{\zeta}+\ldots+\mathrm{M}_\mu n_\mu^{\zeta})],$$

en faisant $\zeta=\frac{\tau_1}{u_1}$, et $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_\nu$ étant μ constantes d'intégration ;

S indique que la somme d'un nombre quelconque de quantités pareilles à celle qui est entre crochets satisfait à l'équation (72), et les quantités arbitraires $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$ peuvent varier à volonté d'un terme à l'autre.

Nous donnerons plus tard le moyen de parvenir directement à l'expression (76); pour l'instant, il suffit de vérifier qu'elle satisfait à l'équation proposée. Voici comment on peut effectuer cette vérification.

Posons $m = n - 1$, et, au lieu de l'équation caractéristique (73), considérons l'équation

$$(77) \qquad C_\mu m^\mu + C_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + C_0 = 0;$$

on déduirait facilement de (75) que le coefficient général est

$$(78) \quad C_{\mu-\lambda} = \mathrm{Agr}\left[(q_2 - 1)^{\sigma_2}(q_3 - 1)^{\sigma_3} \ldots (q_\nu - 1)^{\sigma_\nu} A(\mu - \lambda, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu)\right],$$

avec la condition (75)'.

Prenons maintenant les différences de w, d'après l'expression (76), en négligeant la somme S, et portons-les dans l'équation (72): nous aurons

$$\begin{aligned} &\mathrm{Agr}\left[p_2^{\sigma_2} \ldots p_\nu^{\sigma_\nu}(q_2 - 1)^{\sigma_2} \ldots (q_\nu - 1)^{\sigma_\nu}\right. \\ &\qquad \left.\times (M_1 n_1^\nu m_1^{\sigma_1} + \ldots + M_\mu n_\mu^\nu m_\mu^{\sigma_1}) A(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)\right] = 0, \end{aligned}$$

avec la condition (72)'; puis, ordonnant par rapport aux quantités qui contiennent les exponentielles n^ν, et tenant compte de (78), il vient

$$\begin{aligned} &p_2^{\sigma_2} \ldots p_\nu^{\sigma_\nu}(M_1 n_1^\nu m_1^\mu + \ldots + M_\mu n_\mu^\nu m_\mu^\mu) C_\mu \\ &\quad - p_2^{\sigma_2} \ldots p_\nu^{\sigma_\nu}(M_1 n_1^\nu m_1^{\mu-1} + \ldots + M_\mu n_\mu m_\mu^{\mu-1}) C_{\mu-1} + \ldots \\ &\qquad\qquad + p_2^{\sigma_2} \ldots p_\nu^{\sigma_\nu}(M_1 n_1^\nu + \ldots + M_\mu n_\mu^\nu) C_0 = 0. \end{aligned}$$

En vertu de (77), cette expression est nulle identiquement, ce qu'il fallait montrer. Il est évident que cette vérification, ayant lieu pour un terme de la somme S, a lieu aussi pour un nombre quelconque de termes composant cette somme.

Revenons à l'expression (76) : cette expression fondamentale ne

peut être d'aucune utilité, sous la forme où elle se présente, parce qu'elle contient les racines n de l'équation caractéristique (73), laquelle a ses coefficients formés de quantités arbitraires $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$; il en résulte que, la nature réelle ou imaginaire des racines n ne pouvant être précisée, ces racines ne peuvent entrer pratiquement dans les calculs (à cause aussi de la difficulté que présenterait la résolution d'une équation algébrique). Il est donc de toute nécessité de transformer l'expression (76); le seul moyen dont on puisse faire usage ici, d'une façon générale, est la transformation par les fonctions symétriques.

Pour cela, opérons comme nous l'avons fait quand il s'agissait de différences totales; posons, comme l'indique Wronski,

$$n^\nu = Z_1 + Z_2 n + \ldots + Z_\mu n^{\mu-1},$$

et donnons à n les μ valeurs qui satisfont à l'équation (73), nous obtenons ainsi μ équations linéaires dont les fonctions Z sont les inconnues.

La résolution de ces équations donne, en supposant qu'il n'y ait pas de racines égales,

$$(79) \qquad Z_\lambda = \frac{\Theta\, n_1^0 n_2^1 \ldots n_{\lambda-1}^{\lambda-2} n_\lambda^\nu n_{\lambda+1}^\lambda \ldots n_\mu^{\mu-1}}{\Theta(n_1^0 n_2^1 \ldots n_\lambda^{\lambda-1} \ldots n_\mu^{\mu-1})}.$$

Ces fonctions Z sont bien des fonctions symétriques des quantités n : elles sont donc exprimables au moyen des coefficients de l'équation (73), comme nous l'avons déjà reconnu précédemment. En ordonnant le numérateur de l'expression (79) par rapport à n_λ^ν, on obtient

$$Z_\lambda = \frac{N_1^{(\lambda)}}{N} n_1^\nu + \frac{N_2^{(\lambda)}}{N} n_2^\nu + \ldots + \frac{N_\mu^{(\lambda)}}{N} n_\mu^\nu;$$

N représente le dénominateur de (79) et les autres quantités $N^{(\lambda)}$ des déterminants mineurs, aux signes près.

D'après cela, si l'on pose

$$M_1 = \frac{N_1^{(\lambda)}}{N} P_\lambda, \quad M_2 = \frac{N_2^{(\lambda)}}{N} P_\lambda, \quad \ldots, \quad M_\mu = \frac{N_\mu^{(\lambda)}}{N} P_\lambda,$$

P_λ étant une nouvelle constante, on a, pour la fonction w,

$$w = S(p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_\lambda Z_\lambda),$$

et, comme il existe μ fonctions Z, il y a μ sommes semblables, ce qui donne

$$(80)\quad w = S(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_1 Z_1) + S(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_2 Z_2) + \ldots + S(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_\mu Z_\mu);$$

les quantités p varient à volonté d'une somme à l'autre.

De cette expression, qui ne contient que des constantes arbitraires, il est facile de passer à une autre qui contienne des fonctions arbitraires. Développons les fonctions Z par rapport aux puissances de $p_2^{u_2}$, $p_3^{u_3}$, ..., puissances que nous avons représentées par q_2, q_3, ..., d'après (74); nous aurons ainsi relativement à l'une des sommes de (80), par la formule de Maclaurin étendue à plusieurs variables,

$$\mathrm{Agr}\left[\frac{p_2^{\sigma_2 u_2} p_3^{\sigma_3 u_3} \ldots p_\nu^{\sigma_\nu u_\nu}}{1^{\sigma_2|1} 1^{\sigma_3|1} \ldots 1^{\sigma_\nu|1}} \left(\frac{d^\varpi Z_\lambda}{dq_2^{\sigma_2} dq_3^{\sigma_3} \ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 S(p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_\lambda)\right],$$

avec la condition

$$\sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi.$$

Le chiffre o, placé au bas de l'une des parenthèses, indique que l'on fait $q_2 = q_3 = \ldots = q_\nu = 0$, après la différentiation de Z_ν.

Si nous posons, pour abréger,

$$\frac{1}{1^{\sigma_2|1} 1^{\sigma_3|1} \ldots 1^{\sigma_\nu|1}} = \theta,$$

l'expression précédente pourra s'écrire

$$(80)'\qquad \mathrm{Agr}\left[\theta\left(\frac{d^\varpi Z_\lambda}{dq_2^{\sigma_2} \ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 S(p_2^{x_2+\sigma_2 u_2} \ldots p_\nu^{x_\nu+\sigma_\nu u_\nu} P_\lambda)\right].$$

Mais, par suite des valeurs arbitraires des quantités p, la somme comprise sous le signe S est une fonction arbitraire, f_λ, des quantités $x_2 + \sigma_2 u_2$, $x_3 + \sigma_3 u_3$, ... D'un autre côté, à cause de l'expression (79)

des fonctions Z et de l'expression (75) des coefficients B de l'équation caractéristique, on voit que, quand ζ est un nombre entier plus grand que $\mu - 1$, alors que $\varpi > \zeta - \lambda + 1$, les dérivées de Z_λ sont nulles, puisque les fonctions Z sont fonctions rationnelles des coefficients B; de plus, comme la factorielle $\frac{1}{1^{\sigma|1}}$ [1] est nulle pour les valeurs négatives de σ, il en résulte que, les quantités $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$ variant de $-\infty$ à $+\infty$, les termes du développement (80)' n'ont de valeurs différentes de zéro que si ϖ est compris entre zéro et $\zeta - \lambda + 1$. L'agrégat (80)' est donc une intégrale définie, prise entre les limites zéro et $\zeta - \lambda + 1$ de x, et l'on a, pour expression de la fonction cherchée,

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} w = & \sum_{\zeta} \left[\theta\left(\frac{d^\omega Z_1}{dq_2^{\sigma_2}\ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_1(x_2+\sigma_2 u_2, \ldots, x_\nu+\sigma_\nu u_\nu)\right] \\ & + \sum_{\zeta-1} \left[\theta\left(\frac{d^\omega Z_2}{dq_2^{\sigma_2}\ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_2(x_2+\sigma_2 u_2, \ldots, x_\nu+\sigma_\nu u_\nu)\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \sum_{\zeta-\mu+1} \left[\theta\left(\frac{d^\omega Z_\mu}{dq_2^{\sigma_2}\ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_\mu(x_2+\sigma_2 u_2, \ldots, x_\nu+\sigma_\nu u_\nu)\right]. \end{aligned}\right.$$

Telle est la forme donnée par Wronski à la fonction intégrale de l'équation proposée dans sa *Critique des fonctions génératrices*. On doit remarquer que le problème est très simplement résolu, puisque la solution se trouve ramenée au calcul de fonctions symétriques et à

---

[1] On a, en effet,

$$x^{\rho+\sigma|\xi} = x^{\rho|\xi}(x+\rho\xi)^{\sigma|\xi},$$

d'où

$$\frac{x^{\rho+\sigma|\xi}}{x^{\rho|\xi}} = (x+\rho\xi)^{\sigma|\xi}.$$

Si l'on fait $\rho = -\sigma$, il vient

$$\frac{1}{x^{-\sigma|\xi}} = (x-\sigma\xi)^{\sigma|\xi} = (x-\sigma)(x-\sigma+\xi)(x-\sigma+2\xi)\ldots(x-\xi);$$

par suite, en donnant à x et à ξ la même valeur, l'unité, par exemple, on voit que la factorielle $\frac{1}{1^{-\sigma|1}}$ est nulle.

celui de leurs dérivées, calculs que l'on peut toujours exécuter comme nous allons le faire.

D'après le théorème donné par les expressions (46) et (46)', nous avons

$$(82)\quad \begin{cases} Z_\lambda B_\mu = \dfrac{\Theta(n_1^0 n_2^1 \ldots n_\lambda^\nu \ldots n_\mu^{\mu-1})}{\ldots} B_\mu \\ \qquad = \aleph(\zeta - \mu + 1) B_\lambda + \aleph(\zeta - \mu + 2) B_{\lambda+1} + \ldots \\ \qquad\qquad + \aleph(\zeta - \lambda + 1) B_\mu, \end{cases}$$

et les fonctions aleph se calculeraient d'après les relations (49) et (49)'. Si l'on veut formuler le résultat de ces dernières opérations, on obtient, comme nous le verrons plus tard, en traitant spécialement des fonctions aleph,

$$(83)\quad \aleph(\xi) = (-1)^\xi \mathrm{Agr}\left\{ 1^{\rho_1} \left(\frac{-1}{B_\mu}\right)^{\rho_1} \frac{(-B_{\mu-1})^{\rho_1} (-B_{\mu-2})^{\rho_2} \ldots [(-1)^{\mu-\xi} B_{\mu-\xi}]^{\rho_\xi}}{1^{\rho_1!} 1^{\rho_2!} \ldots 1^{\rho_\xi!}} \right\},$$

avec les conditions

$$(83)'\quad \begin{cases} \rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 + \ldots + \xi\rho_\xi = \xi, \\ \rho_1 + \rho_2 + \ldots\ldots\ldots + \rho_\xi = \varsigma. \end{cases}$$

Ainsi les fonctions Z sont connues, soit que l'on calcule les fonctions aleph dont elles sont formées, indirectement au moyen des relations (49) et (49)', soit directement au moyen de (83) et (83)'.

Il reste à obtenir les dérivées des fonctions Z par rapport aux quantités $q_2, q_3, \ldots, q_\nu$ qui entrent dans les coefficients B de l'équation caractéristique. Pour cela, considérons le produit

$$(q_2 - 1)^{\sigma_2} (q_3 - 1)^{\sigma_3} \ldots (q_\nu - 1)^{\sigma_\nu}$$

qui entre dans l'expression (75), et désignons-le par Π; prenons la $\nu^{\text{ième}}$ dérivée de ce produit, nous aurons

$$\frac{d^\nu \Pi}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}} = \sigma_2^{\rho_2 - 1} (q_2 - 1)^{\sigma_2 - \rho_2} \sigma_3^{\rho_3 - 1} (q_3 - 1)^{\sigma_3 - \rho_3} \ldots \sigma_\nu^{\rho_\nu - 1} (q_\nu - 1)^{\sigma_\nu - \rho_\nu},$$

en ayant égard à

$$\rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu = \nu.$$

Or, en faisant $q_2 = q_3 = \ldots = q_\nu = 0$ après la dérivation, on a

$$\left(\frac{d^\rho \Pi}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right) = (-1)^{\tau-\upsilon} \sigma_2^{\rho_2|-1} \ldots \sigma_\nu^{\rho_\nu|-1}$$

et, par suite,

$$(84) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^\rho B_{\mu-\lambda}}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right)_0 &= \mathrm{Agr}\left[(-1)^{\tau-\upsilon} \sigma_2^{\rho_2|-1} \ldots \sigma_\nu^{\rho_\nu|-1} A_{\mu-\lambda, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu}\right] \\ &- \frac{\mu-\lambda+1}{1} \left(\frac{d^\rho B_{\mu-\lambda+1}}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right)_0 + \ldots \\ &+ (-1)^\lambda \frac{(\mu-\lambda+1)^{\overline{\lambda|1}}}{1^{\overline{\lambda|1}}} \left(\frac{d^\rho B_\mu}{dq_2^{\rho_2} \ldots dq_\nu^{\rho_\nu}}\right)_0, \end{aligned} \right.$$

en ayant toujours égard à

$$(84)' \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu &= \upsilon, \\ \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu &= \tau. \end{aligned} \right.$$

Il faut observer qu'un terme sera nul dans un des agrégats, quand l'une des factorielles qui entrent dans sa composition sera nulle elle-même; cela arrivera toutes les fois que l'exposant ρ de la base σ sera plus grand que cette base.

Maintenant, au moyen de simples substitutions, on parviendra à calculer la dérivée d'une fonction aleph par (84), et ensuite la dérivée d'une fonction Z par (83); on observera à ce sujet que le calcul est poussé aussi loin qu'il est possible de le faire, vu sa complication, car les substitutions ne sont ici qu'une chose secondaire; on sait d'ailleurs que, dans les calculs numériques, il est avantageux de n'effectuer les substitutions que successivement, lorsque les premières formules ont permis d'obtenir les valeurs numériques des quantités qui entrent dans les formules qui viennent ensuite.

Si l'on observe que, dans les formules précédentes, notamment dans celles qui donnent les coefficients B, les quantités q entrent principalement sous la forme $q - 1$, on peut se proposer, comme devant être préférable dans certains cas, de développer les fonctions Z par rapport aux quantités $q - 1$, mais il faudra également développer les produits $(q_2 - 1)^{\sigma_2}, (q_3 - 1)^{\sigma_3}, \ldots$, pour ordonner ensuite par rapport aux puis-

sances de $q_2, q_3, \ldots$, c'est-à-dire de $p_2^{\sigma_2}, p_3^{\sigma_3}, \ldots$, pour faire entrer ces quantités dans la somme $S(p_2^{r_2} p_3^{r_3} \ldots P_\lambda)$. Nous reviendrons plus loin sur cette transformation; il faut seulement remarquer que, dans les dérivées de Z, on fera après les opérations $q = 1$, de sorte que la dérivée $\left(\frac{d^\nu \Pi}{dq_2^{\sigma_2} \ldots dq_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_1$ est nulle à moins que $\rho_2 = \sigma_2, \rho_3 = \sigma_3, \ldots$, et, par suite, $\nu = \tau$, ce qui réduit l'agrégat, formant le premier terme de l'expression (75) de $B_{\mu-\lambda}$, au seul terme

$$1^{\sigma_2!} \ldots 1^{\sigma_\nu!} A(\mu - \lambda, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu)$$

Exemple. — Comme exemple d'application de ce qui précède, reprenons l'équation du second ordre à trois variables que nous avons développée plus haut; calculons les coefficients de l'équation caractéristique, les dérivées de ces coefficients, les fonctions $\aleph$ et les fonctions Z. Puisque nous considérons des coefficients constants, nous remplacerons les lettres Π par A.

1° L'équation caractéristique

$$B_2 n^2 + B_1 n + B_0 = 0$$

a pour coefficients, d'après (75), les quantités suivantes :

Pour $\lambda = 0$, $\tau = 0$ (75) donne

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

d'où

$$B_2 = A(2, 0, 0).$$

Pour $\lambda = 1$, τ a les valeurs 0 et 1.

$\tau = 0$ donne

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

$\tau = 1$ donne

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1.$$

L'agrégat de (75) se compose de trois termes :

$$A(1, 0, 0) + (q_2 - 1) A(1, 1, 0) + (q_3 - 1) A(1, 0, 1).$$

d'où

$$B_1 = A(1,0,0) + (q_2 - 1)A(1,1,0) + (q_3 - 1)A(1,0,1) - 2A(2,0,0).$$

Pour $\lambda = 2$, τ a les valeurs 0 et 2 ; $\tau = 0$ donne

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0;$$

$\tau = 1$ donne

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1;$$

$\tau = 2$ donne

$$\sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 1,$$
$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 2.$$

L'agrégat de (75) se compose ici de huit termes

$$A(0,0,0) + (q_2 - 1)A(0,1,0) + (q_3 - 1)A(0,0,1)$$
$$+ (q_2 - 1)^2 A(0,2,0) + (q_2 - 1)(q_3 - 1)A(0,1,1) + (q_3 - 1)^2 A(0,0,2),$$

d'où

$$B_0 = A(0,0,0) + (q_2 - 1)A(0,1,0) + \ldots + (q_3 - 1)^2 A(0,0,2)$$
$$- [A(1,0,0) + (q_2 - 1)A(1,1,0) + (q_3 - 1)A(1,0,1) - 2A(2,0,0)]$$
$$+ A(2,0,0).$$

2° Ensuite, pour former les dérivées de ces coefficients B_2, B_1, B_0, nous avons, d'après (84) et (84)', pour la première dérivée par rapport à q_2, $\nu = 1$. Or, pour le coefficient B_2, $\lambda = 0$, on a seulement $\tau = 0$, ce qui indique que la dérivée est nulle, comme cela est d'ailleurs évident,

$$\left(\frac{dB_2}{dq_2}\right)_0 = 0.$$

Pour le coefficient B_1, $\lambda = 1$, puisque ν doit être égal à l'unité,

$\rho_2 = 1$ et $\rho_3 = 0$; on a, par (84),

$$\left(\frac{dB_1}{dq_2}\right)_0 = A(1, 1, 0).$$

Pour le coefficient B_0, $\lambda = 2$, puisque l'on a encore $\nu = 1$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 0$, pour la dérivée par rapport à q_2, il vient

$$\left(\frac{dB_0}{dq_2}\right)_0 = \mathrm{Agr}[(-1)^{\tau-1}\sigma_2 A(0, \sigma_2, \sigma_3)] - A(1, 1, 0);$$

pour $\tau = 0$, on a

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \mathrm{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 1$, on a

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0, \quad \mathrm{Agr} = 1.A(0, 1, 0),$$
$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 1, \quad \mathrm{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 2$, on a

$$\sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0, \quad \mathrm{Agr} = (-1)2A(0, 2, 0),$$
$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 1, \quad \mathrm{Agr} = (-1)A(0, 1, 1),$$
$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 2, \quad \mathrm{Agr} = 0;$$

Par suite

$$\left(\frac{dB_0}{dq_2}\right)_0 = A(0, 1, 0) - 2A(0, 2, 0) - A(0, 1, 1) - A(1, 1, 0).$$

Pour la seconde dérivée par rapport à q_2, $\nu = 2$ avec $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = 0$, on a

$$\left(\frac{d^2B_0}{dq_2^2}\right)_0 = \mathrm{Agr}[(-1)^{\tau-2}\sigma_2^{\tau-1}A(0, \sigma_2, \sigma_3)];$$

pour $\tau = 0$,

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \mathrm{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 1$,

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0, \quad \mathrm{Agr} = (-1)(1-1)A(0, 1, 0) = 0$$

pour $\tau = 2$,

$$\sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0, \quad \mathrm{Agr} = (-1)^0 2.1.A(0, 2, 0),$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_2 = 1, & \sigma_3 = 1, \\ \sigma_2 = 0, & \sigma_3 = 2, \end{array}\right\} \mathrm{Agr} = 0;$$

par suite

$$\left(\frac{d^2 B_0}{dq_2^2}\right)_0 = 2A(0, 2, 0).$$

Dans le cas de $\nu = 2$, avec $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 1$, la dérivée sera

$$\left(\frac{d^2 B_0}{dq_2 dq_3}\right)_0 = \mathrm{Agr}\left[(-1)^{\tau-2}\sigma_2\sigma_3 A(0, \sigma_2, \sigma_3)\right];$$

pour $\tau = 0$, ou 1,

$$\mathrm{Agr} = 0;$$

pour $\tau = 2$,

$$\sigma_2 = 2, \quad \sigma_3 = 0, \quad \mathrm{Agr} = 0,$$

$$\sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 1, \quad \mathrm{Agr} = (-1)^0.1.1A(0, 1, 1),$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 2, \quad \mathrm{Agr} = 0;$$

par suite

$$\left(\frac{d^2 B_0}{dq_2 dq_3}\right)_0 = A(0, 1, 1).$$

Les dérivées supérieures sont évidemment nulles.

3° En ce qui concerne les fonctions aleph, d'après (83) et (83)', on a :

Pour $\xi = 1$,

$$\aleph(1) = -\frac{B_1}{B_2}.$$

Pour $\xi = 2$,

$$\aleph(2) = \mathrm{Agr}\left[1^{\xi|1}\left(\frac{-1}{B_2}\right)^{\xi}\frac{(-B_1)^{\rho_1}}{1^{\rho_1|1}}\frac{(+B_0)^{\rho_2}}{1^{\rho_2|1}}\right],$$

avec

$$\rho_1 + 2\rho_2 = 2,$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \xi;$$

ce qui donne

$$\rho_1 = 2, \quad \rho_2 = 0, \quad \xi = 2,$$

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 1, \quad \xi = 1,$$

d'où

$$\aleph(2) = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^2 - \frac{B_0}{B_2}.$$

Pour $\xi = 3$,

$$\aleph(3) = (-1)^3 \operatorname{Agr}\left[1^{\varsigma|1}\left(\frac{-1}{B_2}\right)^{\varsigma} \frac{(-B_1)^{\rho_1}}{1^{\rho_1|1}} \frac{(+B_0)^{\rho_2}}{1^{\rho_2|1}}\right],$$

avec

$$\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 = 3,$$
$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \varsigma.$$

Cet agrégat ne contient pas le facteur $\frac{(-B_{-1})^{\rho_3}}{1^{\rho_3|1}}$, parce que, le coefficient B_{-1} n'existant pas, ou étant nul, les termes qui subsisteront dans le développement seront ceux pour lesquels on aura $\rho_3 = 0$. On a donc les systèmes suivants :

$$\rho_1 = 3, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = 0, \quad \varsigma = 3,$$
$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = 1, \quad \rho_3 = 0, \quad \varsigma = 2,$$
$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = 1, \quad \varsigma = 1.$$

D'après ce que nous venons de dire, les deux premiers systèmes seuls conviennent; par suite, il vient

$$\aleph(3) = -\left(\frac{B_1}{B_2}\right)^3 + 2\frac{B_1 B_0}{B_2^2}.$$

Pour $\xi = 4$,

$$\aleph(4) = \operatorname{Agr}\left[1^{\varsigma|1}\left(\frac{-1}{B_2}\right)^{\varsigma} \frac{(-B_1)^{\rho_1}}{1^{\rho_1|1}} \frac{(+B_0)^{\rho_2}}{1^{\rho_2|1}}\right],$$

avec

$$\rho_1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 + 4\rho_4 = 4,$$
$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = \varsigma;$$

ce qui donne

$$\rho_1 = 4, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = 0, \quad \rho_4 = 0, \quad \varsigma = 4,$$
$$\rho_1 = 2, \quad \rho_2 = 1, \quad \rho_3 = 0, \quad \rho_4 = 0, \quad \varsigma = 3,$$
$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = 1, \quad \rho_4 = 0, \quad \varsigma = 2,$$
$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 2, \quad \rho_3 = 0, \quad \rho_4 = 0, \quad \varsigma = 2,$$
$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = 0, \quad \rho_4 = 1, \quad \varsigma = 1.$$

Le troisième et le cinquième système de valeurs, donnant des termes nuls, ne conviennent pas; le développement de l'agrégat se compose donc de trois termes

$$\aleph(4) = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^4 - 3\frac{B_1^2 B_0}{B_2^3} + \frac{B_0^2}{B_2^2}.$$

On vérifierait facilement l'exactitude de ces quantités en calculant de proche en proche les fonctions aleph au moyen des relations (49) et (49)'.

4° Enfin le calcul des fonctions Z ne présente aucune difficulté; il n'y a ici que deux fonctions, d'après (82),

$$Z_1 = \aleph(\zeta - 1)\frac{B_1}{B_2} + \aleph(\zeta) = -\aleph(\zeta - 2)\frac{B_0}{B_2},$$

$$Z_2 = \aleph(\zeta - 1).$$

Ces valeurs se vérifient aisément; en effet, on a

$$Z_1 = n_1 n_2 \frac{n_1^{\nu-1} - n_2^{\nu-1}}{n_2 - n_1} = -n_1 n_2 (n_2^{\nu-2} + n_2^{\nu-3} n_1 + \ldots + n_1^{\nu-2}),$$

$$Z_2 = \frac{n_2^{\nu} - n_1^{\nu}}{n_2 - n_1} = n_2^{\nu-1} + n_2^{\nu-2} n_1 + \ldots + n_2 n_1^{\nu-2} + n_1^{\nu-1},$$

et l'on reconnaît ainsi le développement des fonctions aleph que nous venons d'obtenir. La suite du calcul n'offre aucun intérêt.

Nous n'avons pas à nous arrêter au cas où il existerait des relations entre les coefficients de l'équation différentielle.

L'intégration complète de l'équation (72) aux différences partielles, linéaire et à coefficients constants, formant l'équation réduite de l'équation proposée (65), est ainsi donnée par l'ensemble des formules (73), (74), (75), (75)', (84), (84)', pour ce qui concerne la formation des coefficients de l'équation caractéristique (73), et (81), (82), (83), (83)', (84), (84)', pour les quantités qui entrent dans l'expression (81), la fonction cherchée w.

Intégrale générale de l'équation proposée. — Pour former les quantités qui entrent dans l'expression (68) de l'intégrale générale de l'équation proposée aux différences partielles (65), il resterait à prendre

les différences et les dérivées de la fonction ϖ par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Pour la première variable x_1, il faudrait opérer sur les fonctions $\aleph$ de la forme $\aleph(\zeta + \eta)$, ζ étant $\frac{x_1}{\Delta x_1}$ et η une constante. Nous avons déjà effectué ce calcul à propos des équations aux différences totales [formules (56) à (62)] : il n'y a donc pas lieu d'y revenir; remarquons seulement que, par suite des transformations auxquelles on est conduit, il faut prendre, au lieu de racines m de l'équation caractéristique, les racines $m - 1$ ou n de l'équation (77) ; cette dernière est ainsi la véritable équation caractéristique, et ce sont les coefficients C de (77) qui doivent être introduits dans les calculs au lieu des coefficients B de (73). Quant aux différences et aux dérivées par rapport aux variables $x_2, \ldots, x_\nu$, elles doivent être prises sur les fonctions arbitraires $f_1, f_2, \ldots$; on les obtiendra sans difficulté une fois la forme de ces fonctions déterminée.

Mais le moyen d'obtenir généralement les dérivées partielles de ϖ qui entrent dans l'expression (68) consiste, comme nous l'avons déjà indiqué, à prendre les différentielles totales des divers ordres de l'équation proposée (équation en y); on aura, de cette manière, autant de relations qu'il est nécessaire d'en avoir pour déterminer les dérivées partielles en question; on changera ensuite y en ϖ.

Ainsi, pour l'équation proposée, que nous écrirons $\varphi = 0$, nous aurons, pour la première différentiation, un résultat de la forme

$$\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)dx_1 + \left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right)dx_2 + \ldots + \left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}\right)dx_\nu + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)dy = 0,$$

et, comme y est fonction des variables indépendantes,

$$dy = \frac{dy}{dx_1}dx_1 + \frac{dy}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{dy}{dx_\nu}dx_\nu,$$

il vient alors

$$\left[\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_1}\right]dx_1 + \left[\left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_2}\right]dx_2 + \ldots$$
$$+ \left[\left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dy}{dx_\nu}\right]dx_\nu = 0.$$

Les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ étant indépendantes les unes des autres,

l'égalité précédente donne les relations

$$\left(\frac{dz}{dx_1}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx_1} = 0,$$

$$\left(\frac{dz}{dx_2}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{dz}{dx_\nu}\right) + \left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx_\nu} = 0,$$

et les dérivées partielles du premier ordre de y se trouvent déterminées par des relations du premier degré. En opérant d'une manière analogue, on obtiendrait les dérivées partielles du second ordre de y, et ainsi de suite, toutes les dérivées se trouvant déterminées par des équations linéaires. Ensuite on remplacera y par w, ce qui permettra de calculer au moyen de l'expression (81) les fonctions de cette quantité qui entrent dans les relations linéaires; on obtient en général, de cette manière, les dérivées partielles de w d'une manière bien plus exacte que si on les déduisait directement de l'expression (81), et l'expression fondamentale (68) est plus convergente.

L'expression (68) donne, au moyen des quantités qui viennent d'être déterminées, l'intégrale générale de l'équation proposée (65), parce que l'on introduit μ fonctions arbitraires. Mais ces fonctions peuvent toutes, ou en partie, se réduire à des constantes périodiques; ces constantes devant donner les valeurs initiales des différences partielles seront au nombre maximum de

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu)}{1.2\ldots\nu} - 1.$$

Il faut retrancher l'unité du rapport des factorielles à cause de l'équation proposée qui donne une relation entre les valeurs initiales de l'inconnue et de ses différences partielles des différents ordres.

Cas des différentielles. — Examinons maintenant le cas où les différences deviennent infiniment petites; soit l'équation linéaire à coefficients constants et aux dérivées partielles, d'ordre μ,

$$(85)\qquad \mathrm{Agr}^{\mu}\left[\frac{d^{\sigma}w}{dx_1^{\sigma_1}\,dx_2^{\sigma_2}\ldots dx_\nu^{\sigma_\nu}}\,\mathrm{A}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)\right] = 0,$$

avec la condition

$$(85)\qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi.$$

Les différences Δw, u_1, u_2, ..., que nous avions plus haut, deviennent des différentielles dw, dx_1, dx_2, ..., de sorte que, si nous comparons l'équation (85) à l'équation (72), nous devons considérer la différence $\Delta^\varpi w$ comme remplacée par la différentielle $d^\varpi w$, et les différentielles des variables indépendantes qui sont données comme faisant partie intégrante des coefficients constants. Il en résulte que, dans l'équation caractéristique, les quantités $q - 1$ ou $p^u - 1$, donnent

$$\frac{p^{dx} - 1}{dx} = \mathrm{L}p,$$

et les racines n deviennent $1 - m\,dx$, ce qui donne aussi

$$m = \frac{n - 1}{dx}.$$

Ainsi, en vue de l'équation (73), nous sommes conduit à prendre pour équation caractéristique une équation de la forme de l'équation (77), savoir

$$(86)\qquad \mathrm{C}_\mu m^\mu + \mathrm{C}_{\mu-1} m^{\mu-1} + \ldots + \mathrm{C}_0 = 0,$$

dont les coefficients sont

$$(87)\qquad \mathrm{C}_{\mu-\lambda} = \mathrm{A}\mathrm{gr}^\lambda (\mathrm{L}p_2)^{\sigma_2} (\mathrm{L}p_3)^{\sigma_3} \ldots (\mathrm{L}p_\nu)^{\sigma_\nu} \mathrm{A}(\mu - \lambda, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_\nu)$$

avec la condition

$$(87')\qquad \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \tau,$$

τ variant de 0 à λ.

Ensuite, pour ce qui concerne l'expression (76) de l'intégrale, puisque n^ζ, où $\zeta = \frac{x}{u}$, devient $n^{\frac{x}{dx}}$,

$$n^{\frac{x}{dx}} = (1 + m\,dx)^{\frac{x}{dx}} = e^{mx};$$

nous avons donc

$$(88)\qquad w = S\left(p_2^{\varepsilon_2} p_3^{\varepsilon_3} \ldots p_\nu^{\varepsilon_\nu}(M_1 e^{m_1 x_1} + M_2 e^{m_2 x_1} + \ldots + M_\mu e^{m_\mu x_1})\right).$$

Il faut encore transformer cette expression au moyen de fonctions symétriques des racines m; pour cela, posons

$$(89)\qquad e^{m x_1} = Z_1 + Z_2 m + Z_2 m^2 + \ldots + Z_\mu m^{\mu-1},$$

en donnant à m les μ valeurs qui satisfont à l'équation caractéristique (86), nous obtenons μ équations linéaires au moyen desquelles nous tirons la valeur de l'une des fonctions z,

$$(90)\qquad Z_\lambda = \frac{D(m_1^0 m_2^1 \ldots m_{\lambda-1}^{\lambda-2} e^{m_\lambda x_1} m_{\lambda+1}^{\lambda} \ldots m_\mu^{\mu-1})}{D(m_1^0 \ldots m_\lambda^{\lambda-1} \ldots m_\mu^{\mu-1})}.$$

D'après ce que nous avons vu à propos des différences, l'expression (88) se transforme également en celle-ci

$$(91)\qquad w = S(p_2^{\varepsilon_2} \ldots p_\nu^{\varepsilon_\nu} P_1 Z_1) + S(p_2^{\varepsilon_2} \ldots p_\nu^{\varepsilon_\nu} P_2 Z_2) + \ldots + S(p_2^{\varepsilon_2} \ldots p_\nu^{\varepsilon_\nu} P_\mu Z_\mu)$$

les quantités arbitraires $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$ pouvant prendre des valeurs différentes dans chacune des sommes indéfinies S, et $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ étant de nouvelles constantes d'intégration.

La formule (91) permet d'obtenir une autre expression contenant des fonctions arbitraires. En effet, les quantités Z, qui sont des fonctions de $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$, peuvent être développées par rapport aux puissances de ces quantités; en faisant usage de la formule de Maclaurin, étendue à plusieurs variables et donnant à $p_2, p_3, \ldots, p_\nu$ la valeur 1 après les différentiations, on obtient pour l'une des sommes précédentes

$$(91)'\qquad \mathrm{Agr}\left[\frac{p_2^{\sigma_2} \ldots p_\nu^{\sigma_\nu}}{1^{\sigma_2 \lfloor 1} \ldots 1^{\sigma_\nu \lfloor 1}} \left(\frac{d^\varpi Z_\lambda}{dp_2^{\sigma_2} \ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 S(p_2^{x_2} \ldots p_\nu^{x_\nu} P_\lambda)\right],$$

avec la condition

$$\sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \varpi$$

ou, en faisant θ égal à l'inverse du produit des factorielles, cette expression s'écrit

$$(91)'' \qquad \mathrm{Agr}\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi}Z}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 \mathrm{S}(p_2^{\sigma_2+\sigma_2}\ldots p_\nu^{x_\nu+\sigma_\nu}\mathrm{P}_\nu)\right].$$

Or la somme S représente, à cause des quantités arbitraires p_2, $p_3, \ldots, p_\nu$, une fonction arbitraire des quantités $x_2+\sigma_2$, $x_3+\sigma_3, \ldots$, $x_\nu+\sigma_\nu$, et l'agrégat est une intégrale; on a donc, pour l'expression definitive de la fonction w,

$$(92) \qquad \left\{\begin{aligned} w = & \sum\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi}Z_1}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_1(x_2+\sigma_2, \ldots, x_\nu+\sigma_\nu)\right] \\ & +\sum\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi}Z_2}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_2(x_2+\sigma_2, \ldots, x_\nu+\sigma_\nu)\right] \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +\sum\left[\theta\left(\frac{d^{\varpi}Z_\mu}{dp_2^{\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu}}\right)_0 f_\mu(x_2+\sigma_2, \ldots, x_\nu+\sigma_\nu)\right]. \end{aligned}\right.$$

Σ est la somme de tous les termes que l'on obtient en faisant varier ϖ de zéro à $+\infty$; les intégrales indéfinies Σ peuvent même être considérées comme prises entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, à cause de la valeur nulle de θ pour les valeurs négatives de σ.

Ici se présente un inconvénient, quand on fait $p=0$, le logarithme devient infini de sorte que le calcul des fonctions Z conduit généralement à des quantités de forme infinie, quoique le résultat final représente des quantités finies; il y a analogie entre ces quantites infinies et les sommes d'imaginaires qui, cependant, peuvent représenter des quantités réelles. Il faut donc recourir à des transformations qui fassent disparaitre toutes difficultés; on voit de suite qu'en developpant les fonctions Z par rapport aux puissances des quantités p_2-1, $p_3-1, \ldots$ et faisant ensuite $p_2, p_3, \ldots$ égaux à l'unité, les logarithmes seront nuls. Effectuons ce calcul; au lieu de $(91)'$, on aura

$$(91)_1 \qquad \mathrm{Agr}\left[\frac{(p_2-1)^{\varsigma_2}\ldots(p_\nu-1)^{\varsigma_\nu}}{1^{\varsigma_2(1)}\ldots 1^{\varsigma_\nu(1)}}\left(\frac{d^{\zeta}Z_\lambda}{dp_2^{\varsigma_2}\ldots dp_\nu^{\varsigma_\nu}}\right)_1 \mathrm{S}(p_2^{\varsigma_2}\ldots p_\nu^{\varsigma_\nu}\mathrm{P}_\lambda)\right]$$

avec

$$\varsigma_1+\varsigma_2+\ldots+\varsigma_\nu=\zeta,$$

et pour faire entrer les puissances de $p_2, p_3, \ldots$ dans la somme S, il

faudra développer les produits $(p_2-1)^{\varsigma_2}\ldots(p_\nu-1)^{\varsigma_\nu}$ et ordonner de nouveau par rapport aux puissances de $p_2, p_3, \ldots$. Or, d'après la formule du binôme,

$$(p-1)^{\varsigma} = \mathrm{Agr}\left[(-1)^{\rho}\frac{\varsigma^{\rho|-1}}{1^{\rho|1}}p^{\varsigma-\rho}\right],$$

par suite

$$(p_2-1)^{\varsigma_2}\ldots(p_\nu-1)^{\varsigma_\nu} = \mathrm{Agr}\left[(-1)^{\tau}\frac{\varsigma_2^{\rho_2|-1}\ldots\varsigma_\nu^{\rho_\nu|-1}}{1^{\rho_2|1}\ldots 1^{\rho_\nu|1}}p_2^{\varsigma_2-\rho_2}\ldots p_\nu^{\varsigma_\nu-\rho_\nu}\right],$$

en faisant

$$\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_\nu=\tau.$$

ρ_2 varie de zéro à ς_2, ρ_3 de zéro à ς_3, etc.; mais, à cause des factorielles, on peut supposer que les quantités ρ varient de zéro à $+\infty$. Posons

$$\sigma=\varsigma-\rho$$

ou

$$\varsigma=\rho+\sigma,$$

le terme général de l'agrégat devient

$$(-1)^{\tau}\frac{(\rho_2+\sigma_2)^{\rho_2|-1}\ldots(\rho_\nu+\sigma_\nu)^{\rho_\nu|-1}}{1^{\rho_2|1}\ldots 1^{\rho_\nu|1}},$$

et ρ peut varier de zéro à $+\infty$; par suite, l'agrégat $(91)_1$ peut s'écrire

$$\mathrm{Agr}\left\{\frac{p^{\sigma_2}\ldots p^{\sigma_\nu}}{1^{\rho_2+\sigma_2|1}\ldots 1^{\rho_\nu+\sigma_\nu|1}}\mathrm{Agr}\left[(-1)^{\tau}\frac{(\rho_2+\sigma_2)^{\rho_2-1}\ldots(\rho_\nu+\sigma_\nu)^{\rho_\nu-1}}{1^{\rho_2|1}\ldots 1^{\rho_\nu|1}}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{d^{\tau+\sigma}Z_\lambda}{dp_2^{\rho_2+\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\rho_\nu+\sigma_\nu}}\right)_1\right]\mathrm{S}\,p_2^{\sigma_2}\ldots p_\nu^{\sigma_\nu}\mathrm{P}_{\lambda_1}\right\};$$

ou, comme les agrégats ne sont ici que des intégrales, on a à la place de $(91)''$

$$(91)_2\quad\left\{\sum_{\sigma}\sum_{\rho}(-1)^{\tau}\left[\frac{(\rho_2+\sigma_2)^{\rho_2-1}\ldots(\rho_\nu+\sigma_\nu)^{\rho_\nu|-1}}{1^{\rho_2|1}\ldots 1^{\rho_\nu|1}\,1^{\rho_2+\sigma_2|1}\ldots 1^{\rho_\nu+\sigma_\nu|1}}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{d^{\tau+\sigma}Z_\lambda}{dp_2^{\rho_2+\sigma_2}\ldots dp_\nu^{\rho_\nu+\sigma_\nu}}\right)_1\right]\mathrm{S}\,p_2^{\sigma_2+\sigma_2}\ldots p_\nu^{\sigma_\nu+\sigma_\nu}\mathrm{P}_{\lambda_1}\right\},$$

avec

$$(91)_3\quad\begin{cases}\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_\nu=\tau,\\ \sigma_2+\sigma_3+\ldots+\sigma_\nu=\sigma,\end{cases}$$

τ et ϖ variant de zéro à $+\infty$; la première somme est prise par rapport à l'indice variable ϖ, et la seconde par rapport à l'indice variable τ.

Comme vérification, si les $\nu - 1$ quantités arbitraires p se réduisent à une seule, on a, comme coefficient de la dérivée de Z_λ sous le signe Σ,

$$(-1)^\rho \frac{(\rho+\sigma)^{\rho!-1}}{1^{\rho!}.1^{\rho+\sigma!}};$$

d'un autre côté, on trouverait directement, pour ce même coefficient,

$$(-1)^\rho \frac{(\rho+\sigma)^{\sigma!-1}}{1^{\sigma!}.1^{\rho+\sigma!}};$$

supposons que σ soit égal à $\rho+\eta$, on aura

$$\frac{(\rho+\sigma)^{\sigma!-1}}{1^{\sigma!}} = \frac{(\rho+\sigma)^{\rho+\eta!!}}{1^{\rho+\eta!}},$$

ou

$$\frac{(\rho+\sigma)^{\rho!-1}\sigma^{\eta!-1}}{1^{\rho!!}(\rho+1)^{\eta!}},$$

ou

$$\frac{(\rho+\sigma)^{\rho!-1}(\rho+1)^{\eta!!}}{1^{\rho!!}(\rho+1)^{\eta!!}},$$

ce qui conduit à l'identité des deux expressions précédentes.

Les fonctions Z sont des fonctions symétriques des racines de l'équation caractéristique : il est donc possible de les calculer sans résoudre cette équation. A cet effet, développons l'exponentielle e^{mx} ; nous avons

$$e^{mx} = 1 + \frac{m.x}{1} + \frac{m^2.x^2}{1^{2!}} + \frac{m^3.x^3}{1^{3!!}} + \cdots,$$

et remplaçant cette exponentielle, dans le déterminant (90), par cette expression, il vient

$$Z_\lambda = \frac{x^{\lambda-1}}{1^{\lambda-1!!}} + \frac{D(m_1^0\ldots m_\lambda^\mu\ldots m_\mu^{\mu-1})}{N}\frac{x^\mu}{1^{\mu!}} + \frac{D(m_1^0\ldots m_\lambda^{\mu-1}\ldots m_\mu^{\mu-1})}{N}\frac{x^{\mu+1}}{1^{\mu+1!!}} + \cdots$$

Représentons les coefficients de ce développement par $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, nous aurons alors

$$(93) \qquad Z_\lambda = \frac{x^{\lambda-1}}{1^{\lambda-1!!}} + Q_1\frac{x^\mu}{1^{\mu!}} + Q_2\frac{x^{\mu+1}}{1^{\mu+1!!}} + Q_3\frac{x^{\mu+2}}{1^{\mu+2!!}} + \cdots$$

et, d'après un théorème sur les fonctions aleph que nous avons déjà énoncé précédemment, (38)' et (46)', on a

$$(94)\qquad C_\mu Q_\xi = \aleph(\xi) C_\lambda + \aleph(\xi+1) C_{\lambda+1} + \ldots + \aleph(\xi+\mu-\lambda) C_\mu.$$

En particulier,

$$(94)'\qquad \begin{cases} C_\mu Q_1 = \aleph(1) C_\lambda + \aleph(2) C_{\lambda+1} + \ldots + \aleph(1+\mu-\lambda) C_\mu, \\ C_\mu Q_2 = \aleph(2) C_\lambda + \aleph(3) C_{\lambda+1} + \ldots + \aleph(2+\mu-\lambda) C_\mu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Telles sont, (93) et (94), les formules qui permettent d'obtenir les fonctions Z.

Pour terminer, il nous reste à indiquer comment on peut obtenir les dérivées des fonctions Z par rapport aux quantités p: cette opération se réduit, en dernier lieu, à prendre les dérivées des coefficients de l'équation caractéristique, puisque les fonctions aleph, dont sont composées les quantités Z, sont elles-mêmes formées au moyen des coefficients de l'équation, comme l'indique la formule (83).

Prenons d'abord la dérivée d'ordre ρ de Lp, on a

$$(95)\qquad \frac{d^\rho Lp}{dp^\rho} = (-1)^{\rho-1} \frac{(\rho-1)!}{p^\rho}.$$

Cherchons ensuite la dérivée de la puissance q de Lp. Pour cela, remarquons qu'il s'agit de trouver la dérivée d'une fonction de fonction; soit y une fonction de x et $f(y)$ la fonction dont nous cherchons la dérivée d'ordre ρ; nous avons, d'après Wronski (*Technie*, seconde section) [1],

$$(96)\qquad \frac{d^\rho F(y)}{dx^\rho} = (-1)^{\rho-1} \sum_\rho \left| \frac{d^\alpha F(y)}{dy^\alpha} \frac{\Lambda(\rho-\alpha, \alpha)}{(-1)^\alpha} \right|,$$

la somme Σ s'étendant de 1 à ρ, pour les valeurs entières que l'on peut

(1) Nous ne pouvons reproduire ici la démonstration de cette formule importante. Nous nous proposons de la donner prochainement avec celles que nous avons dû omettre.

donner à l'indice α; on a de plus

$$(96)' \qquad A(\rho-\alpha,\alpha) = \operatorname{Agr}\left(\frac{\frac{d^{r_1}y}{dx^{r_1}}\,\frac{d^{r_2}y}{dx^{r_2}}\cdots\frac{d^{r_\alpha}y}{dx^{r_\alpha}}}{1^{r_1|1}\,1^{r_2|1}\cdots 1^{r_\alpha|1}}\right),$$

avec

$$(96)'' \qquad r_1+r_2+\ldots+r_\alpha=\rho,$$

les indices $r_1, r_2, \ldots$ étant au moins égaux à l'unité.

Faisons $F(y)=y^\eta$, $y=Lp$ et $x=p$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d^\rho(Lp)^\eta}{dp^\rho} &= \eta^{\rho|-1}(Lp)^{\eta-\rho}A(0,\rho)\\ &+\frac{1^{\rho|1}}{1^{\rho-1|1}}\eta^{\rho-1|-1}(Lp)^{\eta-\rho+1}A(1,\rho-1)+\ldots\\ &+\frac{1^{\rho|1}}{1^{1|1}}\eta^{1|-1}(Lp)^{\eta-1}A(\rho-1,1),\end{aligned}$$

ou, en conservant la forme (96),

$$(96)_1 \qquad \frac{d^\rho(Lp)^\eta}{dp^\rho} = 1^{\rho|1}\sum_\rho\left[\frac{\eta^{\rho-\alpha|-1}}{1^{\rho-\alpha|1}}(Lp)^{\eta-\rho+\alpha}A(\alpha,\rho-\alpha)\right].$$

Si l'on a maintenant à différentier le produit des logarithmes qui entre dans l'expression (87) du coefficient $C_{\mu-\lambda}$, il vient

$$(96)_2 \qquad \frac{d^\tau(Lp_2)^{\sigma_2}\ldots(Lp_\nu)^{\sigma_\nu}}{dp_2^{\rho_2}\ldots dp_\nu^{\rho_\nu}} = 1^{\rho_2|1}\ldots 1^{\rho_\nu|1}\sum_{\rho_2}\cdots\sum_{\rho_\nu},$$

en mettant, pour simplifier, les caractéristiques $\sum_\rho$ des sommes précédentes à la place de ces sommes elles-mêmes.

Dans le cas où l'on fait $p=1$ après la différentiation, le résultat se simplifie; la dérivée $(96)_1$ est nulle, si $\rho<\eta$, puisque le logarithme est nul pour $p=1$. Si $\rho=\eta$, nous avons

$$\left[\frac{d^\eta(Lp)^\eta}{dp^\eta}\right]_1 = \eta^{\eta|-1}A(0,\eta);$$

et nous pouvons remplacer la factorielle $\eta^{\eta|-1}$ par $1^{\eta|1}$, qui est identique.

En dernier lieu, supposons $\rho = \eta + \alpha$; le développement se réduit encore à un seul terme pour $p = 1$,

$$\left[\frac{d^{\eta-\alpha}(\mathrm{L}p)^{\eta}}{dp^{\eta+\alpha}}\right]_1 = 1^{\eta+\alpha+1}\,\mathrm{A}(\alpha, \eta);$$

quant à l'agrégat, d'après (96)′, il est

$$\mathrm{A}(\alpha, \eta) = \mathrm{Agr}\left[\frac{(-1)^{r_1-1}\,1^{r_1-1+1}(-1)^{r_2-1}\,1^{r_2-1+1}\ldots(-1)^{r_\eta-1}\,1^{r_\eta-1+1}}{1^{r_1+1}\,1^{r_2+1}\ldots 1^{r_\eta+1}}\right],$$

et réduisant, en tenant compte de (96)″, il vient

$$\mathrm{A}(\alpha, \eta) = \mathrm{Agr}\left[\frac{(-1)^{\alpha}}{r_1 r_2 \ldots r_\eta}\right].$$

Nous avons donc

$$(97)\qquad \left[\frac{d^{\eta-\alpha}(\mathrm{L}p)^{\eta}}{dp^{\eta+\alpha}}\right]_1 = 1^{\eta+\alpha+1}(-1)^{\alpha}\,\mathrm{Agr}\left(\frac{1}{r_1 r_2 \ldots r_\eta}\right),$$

avec

$$(97)'\qquad r_1 + r_2 + \ldots + r_\eta = \alpha + \eta,$$

les quantités $r_1, r_2, \ldots$ étant des nombres entiers positifs, et ne pouvant être nulles.

Considérons maintenant le produit

$$(\mathrm{L}p_2)^{\sigma_2}(\mathrm{L}p_3)^{\sigma_3}\ldots(\mathrm{L}p_\nu)^{\sigma_\nu}$$

qui entre dans l'expression (87) des coefficients de l'équation caractéristique. D'après ce qui précède, les dérivées de ce produit seront nulles, si l'ordre de chacune des dérivées partielles n'est pas au moins égal respectivement à $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$, quantités qui composent (87)′, et si l'on fait, après les différentiations, $p_2 = p_3 = \ldots = 1$; nous devons donc supposer que les ordres de dérivations partielles sont respectivement $\sigma_2 + \rho_2, \sigma_3 + \rho_3, \ldots$, et comme on a, d'après (87)′,

$$(98)\qquad \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_\nu = \tau;$$

nous représenterons la somme des indices ρ par ϖ

$$(98)' \qquad \rho_2 + \rho_3 + \ldots + \rho_\nu = \varpi;$$

nous aurons ainsi

$$\left[\frac{d^{\tau+\varpi}(\mathrm{L}p_2)^{\sigma_2}\ldots(\mathrm{L}p_\nu)^{\sigma_\nu}}{dp_2^{\sigma_2+\rho_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu+\rho_\nu}}\right]_1 = (-1)^{\varpi}\, 1^{\sigma_2-\rho_2|1}\ldots 1^{\sigma_\nu-\rho_\nu|1}$$
$$\times \operatorname{Agr}\left(\frac{1}{r_{2,1}r_{2,2}\ldots r_{2,\sigma_2}}\right)\ldots \operatorname{Agr}\left(\frac{1}{r_{\nu,1}r_{\nu,2}\ldots r_{\nu,\sigma_\nu}}\right),$$

avec

$$(98)'' \qquad \left\{\begin{array}{l} r_{2,1} + r_{2,2} + \ldots + r_{2,\sigma_2} = \sigma_2 + \rho_2, \\ r_{3,1} + r_{3,2} + \ldots + r_{3,\sigma_3} = \sigma_3 + \rho_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{\nu,1} + r_{\nu,2} + \ldots + r_{\nu,\sigma_\nu} = \sigma_\nu + \rho_\nu. \end{array}\right.$$

Représentons le produit des factorielles par $\Pi(1^{\sigma+\rho|1})$, celui des agrégats par $\Pi[\operatorname{Agr}]$; nous aurons définitivement pour la dérivée d'un coefficient $C_{\mu-\lambda}$ de l'équation caractéristique (86)

$$(99) \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{d^{\tau+\varpi}C_{\mu-\lambda}}{dp_2^{\sigma_2+\rho_2}\ldots dp_\nu^{\sigma_\nu+\rho_\nu}}\right)_1 \\ \quad = \operatorname{Agr}^{\lambda}\left\{(-1)^{\varpi}\Pi(1^{\sigma+\rho|1})\Pi\left[\operatorname{Agr}\left(\dfrac{1}{r_1\ldots r_\sigma}\right)\right]\mathrm{A}(\mu-\lambda, \sigma_2\ldots\sigma_\nu)\right\}, \end{array}\right.$$

avec les conditions (98), (98)', (98)''. τ est compris entre zéro et λ pour le premier agrégat, et si $\tau + \varpi$ est plus petit que λ, les termes de cet agrégat qui correspondent aux valeurs de $\tau + \varpi$ supérieures à celle qui est donnée sont nuls.

Il faut remarquer que l'on n'a pas à tenir compte du premier agrégat de (99), $\operatorname{Agr}^{\lambda}$, si l'on a calculé les dérivées des coefficients de l'équation caractéristique dont les indices sont supérieurs à $\mu - \lambda$, parce que les termes calculés ainsi se reproduisent dans $C_{\mu-\lambda}$, en ayant soin toutefois de mettre dans les coefficients de l'équation différentielle l'indice $\mu - \lambda$ au lieu des indices supérieurs, c'est-à-dire que, si l'on a calculé $C_{\mu-\lambda+1}$, le coefficient $C_{\mu-\lambda}$ contiendra, outre les nouveaux termes,

tous les termes qui entrent dans $C_{\mu-\lambda+1}$, pourvu que l'on change, dans

$$A(\mu-\lambda+1, \sigma_2 \ldots \sigma_\nu),$$

l'indice $\mu-\lambda+1$ en $\mu-\lambda$.

Exemple. — Par exemple, considérons l'équation

$$C_2 m^2 + C_1 m + C_0 = 0;$$

sans répéter un calcul que nous avons fait plus haut, nous trouvons

$$\begin{aligned}
C_2 &= A(2, 0, 0),\\
C_1 &= A(1, 0, 0) + Lp_2 A(1, 1, 0) + Lp_3 A(1, 0, 1),\\
C_0 &= A(0, 0, 0) + Lp_2 A(0, 1, 0) + Lp_3 A(0, 0, 1)\\
&\quad + (Lp_2)^2 A(0, 2, 0) + Lp_2 Lp_3 A(0, 1, 1) + (Lp_3)^2 A(0, 0, 2).
\end{aligned}$$

Les dérivées de C_2 sont nulles; pour celles de C_1, la formule (99) se réduit à (95) en y joignant le coefficient $A(1, 1, 0)$, ou $A(1, 0, 1)$; on trouve

$$\left(\frac{dC_1}{dp_2}\right)_1 = A(1, 1, 0), \quad \left(\frac{d^2 C_1}{dp_2^2}\right)_1 = -A(1, 1, 0),$$

$$\left(\frac{d^3 C_1}{dp_2^3}\right)_1 = 2A(1, 1, 0), \quad \left(\frac{d^4 C_1}{dp_2^4}\right)_1 = -6A(1, 1, 0),$$

et ainsi de suite. Pour les dérivées de C_0 par rapport à p_2 ou à p_3 seulement, la formule (99) se réduit à (97) avec un coefficient convenable, en ajoutant les termes que nous venons de calculer. Examinons ce que donne la formule (99), pour la première dérivée par rapport à p_2, on a

$$\sigma_2 = \tau = 1, \quad \rho_2 = \varpi = 0 \quad \text{et} \quad r_{2,1} = 1;$$

comme $\lambda = 2$, Agr^λ se réduit à un seul terme

$$\left(\frac{dC_0}{dp_2}\right)_1 = (-1)^0 1^{0,1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) A(0, 1, 0) = A(0, 1, 0).$$

Comme nous l'avons dit, ce terme se déduirait de la dérivée de C_1 en changeant $A(1, 1, 0)$ en $A(0, 1, 0)$.

Pour la seconde dérivée de C_0 par rapport à p_2, on a $\tau + \varpi = 2$; or dans Agr^λ, $\lambda = 2$, τ peut prendre les valeurs 1 ou 2, avec $\varpi = 1$ ou 0, et, puisque nous avons calculé la première dérivée de C_0, il suffit de supposer $\tau = 2$, $\varpi = 0$ et de négliger Agr^λ, ce qui nous donne pour l'ensemble des termes

$$\left(\frac{d^2 C_0}{dp_2^2}\right)_1 = (-1)^0 1^{2|1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1.1}\right) A(0, 2, 0) - A(0, 1, 0)$$
$$= 2A(0, 2, 0) - A(0, 1, 0).$$

En opérant de même pour la dérivée troisième, on a $\tau + \varpi = 3$ et

$$\sigma_2 = \tau = 2, \quad \rho_2 = \varpi = 1, \quad r_{2,1} + r_{2,2} = \sigma_2 + \rho_2,$$

ce qui conduit à

$$r_{2,1} = 2, \quad r_{2,2} = 1,$$
$$r_{2,1} = 1, \quad r_{2,2} = 2.$$

d'où

$$\left(\frac{d^3 C_0}{dp_2^3}\right)_1 = (-1)^1 1^{3|1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) A(0, 2, 0) + 2A(0, 1, 0)$$
$$= -6A(0, 2, 0) + 2A(0, 1, 0).$$

Pour la double dérivée par rapport à p_2 et à p_3, on a

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 1, \quad \tau = 2, \quad \varpi = 0, \quad r_{2,1} = 1, \quad r_{3,1} = 1,$$
$$\left(\frac{d^2 C_0}{dp_2 dp_3}\right)_1 = (-1)^0 1^{4|1} . 1^{1|1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) . \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) A(0, 1, 1) = A(0, 1, 1).$$

Pour la dérivée troisième par rapport à p_2 et p_3, on a

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 1, \quad \tau = 2, \quad \rho_2 = 1, \quad \rho_3 = 0, \quad \varpi = 1,$$
$$r_{2,1} = 1, \quad r_{2,2} = 1, \quad r_{3,1} = 1,$$
$$\left(\frac{d^3 C_0}{dp_2^2 dp_3}\right)_1 = (-1)^1 1^{4|1} . 1^{1|1} \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1.1}\right) . \mathrm{Agr}\left(\frac{1}{1}\right) A(0, 1, 1) = -A(0, 1, 1).$$

On voit ainsi comment on doit appliquer la formule (99).

En résumé, l'intégration de l'équation (85), aux dérivées partielles, linéaires et à coefficients constants, est donnée par les formules (87), (87') pour ce qui concerne la formation des coefficients de l'équation

caractéristique (86); (98), (98)', (98)'', (99) pour les dérivées des coefficients de cette équation; enfin les formules (93), (94) donnent les fonctions Z qui entrent dans l'expression (92) de la fonction cherchée w, expression dans laquelle nous avons ensuite substitué des sommes de la forme $(91)_2$.

Intégrale générale de l'équation proposée. — Il est possible d'effectuer maintenant, sans difficulté, tous les calculs relatifs à l'intégration des équations linéaires à coefficients constants et aux dérivées partielles, et cette intégration conduit à celle des équations à coefficients quelconques en donnant les quantités qui entrent dans l'expression (68). Pour cela, il ne reste plus qu'à former les dérivées partielles de w par rapport aux variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ pour former ensuite les fonctions $\varphi(w)$ et $F(w)$, ainsi que leurs propres dérivées par rapport aux mêmes variables; ces dérivées seront données, pour la variable principale x_1, par les dérivées des développements (93), et pour les autres variables $x_2, x_3, \ldots$ par les dérivées des fonctions arbitraires f_1, $f_2, \ldots$. Ces calculs n'offrent donc aucune particularité.

Cependant il convient de ne calculer ainsi que les dérivées partielles jusqu'à l'ordre μ inclusivement; pour les dérivées d'ordres supérieurs, on prendra les différentielles totales de l'équation proposée et, à partir des ordres $\mu + 1, \mu + 2, \ldots$, les relations que l'on en déduira permettront de déterminer les dérivées partielles au moyen de relations du premier degré, comme nous l'avons indiqué à l'occasion des équations aux différences partielles. L'expression (68) donne, d'après cela, l'intégrale générale de l'équation proposée; elle contient μ fonctions arbitraires, lesquelles peuvent se réduire à

$$\frac{(\mu+1)^{\nu+1}}{1^{\nu+1}} - 1$$

constantes arbitraires au plus, valeurs initiales de la fonction inconnue et de ses dérivées partielles.

Il est inutile d'ajouter que, pour avoir les différences ou les dérivées de l'inconnue, on pourra disposer de la fonction arbitraire $F(y)$ en l'égalant à ces différences ou à ces dérivées, ainsi que nous l'avons déjà montré.

Ainsi, d'après ce qui précède, non seulement on conçoit la possibilité d'intégrer toutes sortes d'équations aux différences ou aux dérivées partielles, mais encore on peut toujours effectuer les calculs nécessaires. Le seul inconvénient qui pourra se présenter sera dû à la longueur des calculs, et l'on se rend compte que, dans bien des cas, il sera impossible d'en éviter la complication ; il existe évidemment un nombre de simplifications au delà duquel on ne peut en introduire de nouvelles. Au grand nombre d'opérations qu'il faut effectuer successivement pour obtenir une intégration d'un ordre élevé viendront s'ajouter les transformations auxquelles il faudra recourir quand les développements ne présenteront pas une convergence suffisante. Les moyens à employer dans ce cas sont ceux que nous avons déjà indiqués.

Détermination des fonctions arbitraires. — Il reste encore à déterminer les fonctions arbitraires. Si l'on a bien saisi ce que nous avons dit plus haut de la détermination des constantes arbitraires, on voit qu'il convient de prendre encore pour point de départ le système des valeurs initiales des diverses quantités variables qui entrent dans la question; la valeur de l'inconnue v se réduit alors à sa valeur fondamentale w, ce qui produit une notable simplification.

Cependant on pourrait être conduit à opérer autrement; nous avons déjà traité la question. Dans l'exemple que nous allons donner, nous indiquerons en détail la marche à suivre, le cas étant assez compliqué.

En donnant donc à la variable principale x_1 sa valeur initiale, on a, d'une part, l'expression de la fonction inconnue au moyen des fonctions arbitraires, et de l'autre, on a, d'après le problème lui-même, une fonction des variables secondaires x_2, x_3, ... qui est donnée par l'état initial, d'où une première relation entre cette fonction et l'expression initiale de la fonction inconnue. On obtiendra ensuite d'autres relations analogues, en nombre suffisant, au moyen des différences ou des dérivées de la fonction inconnue et de nouvelles fonctions qui seront aussi données par l'état initial de ces différences ou de ces dérivées. De cette manière toutes les fonctions arbitraires seront susceptibles d'être déterminées au moyen d'équations primitives, c'est-à-dire par des équations qui ne nécessitent aucune intégration, ce qui est visible si l'on se reporte à la forme des intégrales des équations linéaires à coefficients constants qui forment généralement les équations réduites.

Les fonctions arbitraires une fois déterminées, on peut effectuer le calcul des valeurs de la fonction inconnue : l'état initial est choisi pour fixer les valeurs moyennes des variables; mais, si, pour calculer des valeurs un peu éloignées des valeurs moyennes primitivement considérées, on trouve avantageux de changer ces valeurs moyennes, on prendra, parmi les valeurs pour lesquelles la fonction inconnue est déjà calculée, l'une d'elles choisie convenablement, laquelle sera prise pour nouvelle valeur initiale et servira alors comme nouvelle valeur moyenne après avoir déterminé les nouvelles fonctions arbitraires. Il est bien clair qu'en opérant ainsi de proche en proche il sera possible de calculer toutes les valeurs de la fonction inconnue que l'on voudra déterminer.

Pour préciser ce que nous venons de dire, nous allons intégrer l'équation principale d'un problème bien connu, celle qui représente le mouvement vibratoire des ondes sonores, en prenant pour valeur fondamentale la solution généralement donnée dans les Traités de Mécanique. Nous croyons cet exemple très propre à lever les difficultés qui pourraient se présenter dans les applications des nouveaux calculs.

SIXIÈME EXEMPLE. — *Du mouvement vibratoire des fluides élastiques.*

Équations du problème. — Nous allons établir l'équation des mouvements vibratoires des fluides élastiques, en suivant la marche indiquée par M. Resal dans son *Traité de Mécanique*.

Soient p, p_0 les presssions et ρ, ρ_0 les densités correspondantes d'une même masse de gaz, sous des volumes différents; soient x, y, z les coordonnées d'un point du fluide à l'époque t; f la fonction des vitesses définie par la relation

$$df = u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

où u, v, w sont les composantes de la vitesse du point considéré, c'est-à-dire

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Soit enfin U le potentiel, dont nous n'aurons pas à tenir compte,

puisque nous supposerons nulle l'action des forces extérieures; on a, pour équation du mouvement des fluides,

$$(\alpha)\qquad \frac{dp}{\rho} = dU - d\frac{df}{dt} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right].$$

D'un autre côté, en supposant que le fluide ne reçoive aucune chaleur des corps environnants, ou ne leur en communique pas; on a entre la pression et la densité la relation

$$(\alpha')\qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{c}{c'}}.$$

c et c' sont les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants, dont le rapport est supposé constant pour un même gaz.

Posons

$$\rho = \rho_0(1+\gamma),$$

γ étant la condensation positive ou négative; en introduisant cette nouvelle variable dans la relation précédente, on a

$$\frac{p}{p_0} = (1+\gamma)^{\frac{c}{c'}};$$

puis différentiant, divisant par ρ et faisant

$$a^2 = \frac{c}{c'}\frac{p_0}{\rho_0},$$

il vient

$$(\beta)\qquad \frac{dp}{\rho} = a^2(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}\frac{d\gamma}{1+\gamma}.$$

En éliminant le rapport $\frac{dp}{\rho}$ entre les équations (α) et (β), sans tenir compte de U, comme nous l'avons dit, on obtient

$$(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}\frac{a^2}{1+\gamma}d\gamma = -d\frac{df}{dt} - \frac{1}{2}d\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right].$$

Si l'on désigne par ξ une variable auxiliaire, cette relation donne.

en prenant les dérivées par rapport à cette variable,

$$(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}\frac{a^2}{1+\gamma}\frac{d\gamma}{d\xi} = -\frac{d^2f}{dt\,d\xi} - \frac{d^2f}{dx\,d\xi}\frac{df}{dx} - \frac{d^2f}{dy\,d\xi}\frac{df}{dy} - \frac{d^2f}{dz\,d\xi}\frac{df}{dz}.$$

Pour simplifier, représentons le second membre de cette équation par $F(\xi)$, nous aurons

$$(7)\qquad \frac{d\gamma}{d\xi} = \frac{1+\gamma}{a^2}(1+\gamma)^{1-\frac{c}{c'}}F(\xi).$$

Nous avons encore à tenir compte d'une relation, celle qui exprime la condition de continuité du fluide,

$$(8)\qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0;$$

cette relation donne, en remplaçant ρ et u, v, w par leurs valeurs, savoir, pour ces dernières :

$$u = \frac{df}{dx},\quad v = \frac{df}{dy},\quad w = \frac{df}{dz},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\gamma}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{d\gamma}{dy}\frac{df}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\frac{df}{dz} + (1+\gamma)\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2}\right) = 0.$$

Nous pouvons, au moyen de la relation (7), éliminer les dérivées $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dx}$, $\frac{d\gamma}{dy}$, $\frac{d\gamma}{dz}$, en donnant à la variable auxiliaire ξ les valeurs successives t, x, y, z; on obtiendra ainsi

$$\begin{aligned} &F(t) + F(x)\frac{df}{dx} + F(y)\frac{df}{dy} + F(z)\frac{df}{dz} \\ &\quad + a^2(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Enfin, nous pouvons encore éliminer la fonction $1+\gamma$. Pour cela, en intégrant l'équation (7), après avoir fait passer la variable γ dans le premier membre, si l'on fait $\xi = t$, on obtient

$$(8)\qquad \frac{a^2}{\frac{c}{c'}-1}(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1} = -\frac{df}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right];$$

la constante d'intégration peut être supposée contenue dans f, c'est pourquoi nous n'en tiendrons pas compte.

L'équation (ε) combinée avec la précédente donne définitivement

$$(\zeta)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(t)+\mathrm{F}(x)\frac{df}{dx}+\mathrm{F}(y)\frac{df}{dy}+\mathrm{F}(z)\frac{df}{dz}\\ &\qquad-\left(\frac{c}{c'}-1\right)\left\{\frac{df}{dt}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2\right]\right\}\\ &\qquad\qquad\times\left(\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{d^2f}{dz^2}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

en n'oubliant pas que la fonction $\mathrm{F}(\xi)$ est

$$(\zeta)'\qquad \mathrm{F}(\xi)=-\frac{d^2f}{dt\,d\xi}-\frac{d^2f}{dx\,d\xi}\frac{df}{dx}-\frac{d^2f}{dy\,d\xi}\frac{df}{dy}-\frac{d^2f}{dz\,d\xi}\frac{df}{dz},$$

ξ représentant à volonté l'une des variables t, x, y, z.

Les deux équations du problème sont (ε) et (ζ) avec (ζ)'; f et γ sont les deux fonctions inconnues, et t, x, y et z sont les quatre variables indépendantes.

Remarquons cependant que f n'est pas la véritable inconnue. Cette inconnue est la vitesse V d'une molécule gazeuse; elle a avec la fonction f une relation que nous allons rappeler. Le système des équations simultanées (ε) et (ζ) est tel que l'on peut intégrer séparément, d'abord, l'équation (ζ) par rapport à f ou V, et ensuite résoudre l'équation (ε) par rapport à γ.

Autre forme des équations du problème. — L'équation (ζ) est du second ordre aux dérivées partielles : elle doit nous occuper particulièrement; néanmoins, comme elle est susceptible de réductions importantes, nous n'entreprendrons pas son intégration sous la forme où elle se présente ici.

Les variables x, y et z entrant symétriquement dans l'équation (ζ), on peut les remplacer par leur expression en fonction du rayon vecteur r du point (x, y, z); on a, en effet,

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \quad\text{et}\quad u^2+v^2+w^2=\mathrm{V}^2;$$

d'où, en différentiant,

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr;$$

$$u = \mathrm{V}\frac{x}{r}, \quad v = \mathrm{V}\frac{y}{r}, \quad w = \mathrm{V}\frac{z}{r},$$

et, comme

$$df = u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

on en déduit

$$(\eta) \qquad \frac{df}{dr} = \mathrm{V}.$$

On peut maintenant calculer les dérivées partielles de l'équation (ζ); en faisant usage des variables auxiliaires ξ et ξ', pour x, y et z, il vient

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{dr}\frac{\xi}{r},$$

$$\frac{d^2 f}{dt\,d\xi} = \frac{d^2 f}{dt\,dr}\frac{\xi}{r},$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{d^2 f}{dr^2}\frac{\xi^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2 - \xi^2}{r^3},$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi\,d\xi'} = \frac{d^2 f}{dr^2}\frac{\xi\xi'}{r^2} - \frac{df}{dr}\frac{\xi\xi'}{r^3},$$

d'où les relations

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 = \left(\frac{df}{dr}\right)^2,$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr};$$

et ensuite

$$\mathrm{F}(t) = -\frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{d^2 f}{dt\,dr}\frac{df}{dr}.$$

Quant aux fonctions $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}(y)$, $\mathrm{F}(z)$, on a, pour l'une d'elles,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) = -\frac{d^2 f}{dt\,dr}\frac{x}{r} &- \left(\frac{d^2 f}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2 - x^2}{r^3}\right)\frac{df}{dr}\frac{x}{r} \\ &- \left(\frac{d^2 f}{dr^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2 - y^2}{r^3}\right)\frac{df}{dr}\frac{y}{r} \\ &- \left(\frac{d^2 f}{dr^2}\frac{z^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{r^2 - z^2}{r^3}\right)\frac{df}{dr}\frac{z}{r},\end{aligned}$$

et pour les autres il suffirait de changer d'abord x en y, puis x en z, dans le premier terme seulement; par suite,

$$F(t) + F(x)\frac{df}{dx} + F(y)\frac{df}{dy} + F(z)\frac{df}{dz} = -\frac{d^2f}{dt^2} - 2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr} - \frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2,$$

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right] = \frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2.$$

En réunissant les quantités calculées pour l'équation (ζ), celle-ci devient

$$(\delta)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2f}{dt^2} + 2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left[\frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right]\left(\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}\right) = 0; \end{aligned}\right.$$

quant à l'équation (ε), elle devient

$$(\delta')\qquad \frac{a^2}{\frac{c}{c'} - 1}(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1} + \frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = 0.$$

Telles sont, sous une seconde forme, les deux équations du problème.

Intégration des équations du problème. — 1° *Détermination des valeurs fondamentales.* — L'équation (δ) que nous allons maintenant intégrer ne contient que deux variables indépendantes t et r, et l'inconnue est f; c'est l'équation que nous avons généralement représentée par

$$\varphi(y) = 0,$$

en mettant f à la place de y et de même ψ au lieu de ϖ pour valeur fondamentale, puisque ϖ représente une autre quantité dans le problème qui nous occupe, et aussi Φ au lieu de F, nous aurons pour

expression fondamentale, au lieu de (66) ou (68),

$$(\mathfrak{g}) \qquad \Phi(f) = \Phi(\psi) - \varphi(\psi)\frac{\left(\frac{d\Phi(\psi)}{d\psi}\right)}{\left(\frac{d\varphi(\psi)}{d\psi}\right)} + \ldots;$$

dans le cas présent, nous passerions de l'inconnue f à la vitesse V en faisant $\Phi(f)$ égal à $\frac{df}{dr}$.

Pour déterminer la valeur fondamentale ψ, formons l'équation transformée de la manière suivante, ainsi que nous l'avons déjà expliqué :

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \omega\left[2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right]$$
$$-\left\{1 - \frac{c}{c'}\left[\frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right]\right\}^{\omega} a^2\left(\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}\right) = 0,$$

nous aurons pour équation réduite, en faisant $\omega = 0$,

$$(\iota) \qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\right) = 0;$$

la quantité a^2 est celle que nous avons écrite plus haut pour $\frac{c}{c'}\frac{p_0}{\rho_0}$.

L'équation (ι) est du second ordre, linéaire et aux dérivées partielles: c'est à cette dernière équation approchée que parvient Poisson dans son *Traité de Mécanique*, t. II; aussi l'avons-nous choisie pour équation réduite; de son intégration nous déduirons la solution générale du problème.

Pour justifier la réduction que nous venons d'opérer sur l'équation ($\mathfrak{b}$) en vue de parvenir à l'équation (ι), il suffit de rappeler la manière dont on établit directement cette dernière. On admet que, dans les mouvements vibratoires des gaz, la vitesse des molécules est très faible, par suite les carrés des composantes de la vitesse qui figurent dans l'équation (α) sont nuls, c'est-à-dire que l'on a très sensiblement

$$2\frac{d^2f}{dt\,dr}\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = 0.$$

On remplace aussi $(1+\gamma)^{\frac{c}{c'}-1}$ par l'unité; cette quantité en diffère ordinairement peu, parce que γ est une très petite quantité et que l'exposant $\frac{c}{c'}-1$ est inférieur à $\frac{1}{2}$ (pour l'air, il est 0,419); on a donc très sensiblement, d'après (5)',

$$-\frac{\frac{c}{c'}-1}{a^2}\left[\frac{df}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2\right]=1.$$

Il résulte de ceci que la valeur fondamentale ψ diffère très peu de la fonction f, inconnue du problème, du moins dans les conditions où l'on étudie habituellement les vibrations de l'air, par conséquent le développement de la fonction f doit être très rapidement convergent: il suffira donc de calculer le second terme de l'expression (5).

L'équation (1) peut s'écrire

$$r\frac{d^2\psi}{dt^2}=a^2\left(r\frac{d^2\psi}{dr^2}+2\frac{d\psi}{dr}\right);$$

sous cette forme on voit que le second membre est la dérivée, par rapport à r, de $\frac{d(r\psi)}{dr}$, et il vient

$$(7)\qquad \frac{d^2(r\psi)}{dt^2}=a^2\frac{d^2(r\psi)}{dr^2};$$

par suite, en désignant par F_1 et F_2 deux fonctions arbitraires, on a, comme cela est connu,

$$(7)'\qquad r\psi=F_1(r+at)+F_2(r-at);$$

mais il importe ici de déduire cette solution des formules que nous avons données. Prenons t pour variable principale : on verrait facilement, d'après (86), que l'équation caractéristique correspondant à l'équation (7),

$$C_2m^2+C_1m+C_0=0,$$

a pour coefficients

$$C_2 = 1, \quad C_1 = 0, \quad C_0 = -a^2(Lp)^2;$$

par suite, ses racines sont égales et de signes contraires,

$$m_1 = aLp, \quad m_2 = -aLp.$$

Au lieu de former les fonctions Z_1, Z_2 et de les développer ensuite, il est plus simple ici de développer directement les exponentielles comme on le ferait pour les fonctions Z; on a ainsi

$$e^{\pm mt} = e^{\pm aLpt} = p^{\pm at},$$

et, par suite,

$$r\psi = \sum \left[\frac{1}{1^{\sigma|1}} \left(\frac{d^\sigma p^{at}}{dp^\sigma} \right)_0 F_1(r+\sigma) + \frac{1}{1^{\sigma|1}} \left(\frac{d^\sigma p^{-at}}{dp^\sigma} \right)_0 F_2(r-\sigma) \right].$$

La quantité à différentier pour le premier terme entre crochets donne

$$\frac{d^\sigma p^{at}}{dp^\sigma} = at^{\sigma|-1} p^{at-\sigma};$$

pour le second, il suffirait de changer a en $-a$. Comme il faut faire ensuite $p = 0$, il est nécessaire que at soit égal à σ, afin que l'expression ne soit ni nulle ni infinie : le rapport

$$\frac{at^{\sigma|-1}}{1^{\sigma|1}}$$

est alors égal à l'unité, et l'on a pour $r\psi$ la valeur précédente donnée par (2)'. Dans la théorie des factorielles, les règles applicables aux exposants entiers sont généralement applicables aux exposants non entiers, comme dans le cas des exponentielles.

La formation des fonctions Z est aussi très simple, bien que le calcul de la fonction $r\psi$ par ce moyen soit un peu plus long que le précédent. On a

$$Z_1 = \frac{m_2 e^{m_1 t} - m_1 e^{m_2 t}}{m_2 - m_1}, \quad Z_2 = \frac{e^{m_2 t} - e^{m_1 t}}{m_2 - m_1},$$

ou bien, en mettant $+m$ et $-m$ au lieu de m_1 et m_2,

$$Z_1 = \frac{1}{2}(e^{mt} + e^{-mt}), \quad Z_2 = \frac{1}{2m}(e^{mt} - e^{-mt}),$$

autrement

$$(\lambda) \qquad Z_1 = \cos(at\mathrm{L}p), \quad Z_2 = \frac{\sin(at\mathrm{L}p)}{a\mathrm{L}p}.$$

On pourrait encore obtenir ce résultat d'une autre façon en exprimant les fonctions Z au moyen des fonctions aleph; en effet, d'après les formules (93), (94), on aurait

$$Z_1 = 1 + \aleph(2)\frac{t^2}{1^{2|1}} + \aleph(4)\frac{t^4}{1^{4|1}} + \cdots,$$

$$Z_2 = \frac{t}{1} + \aleph(2)\frac{t^3}{1^{3|1}} + \aleph(4)\frac{t^5}{1^{5|1}} + \cdots;$$

d'après les formules (49) et (49)', ou (83) et (83)', on aurait encore

$$\aleph(1) = 0, \quad \aleph(2) = a^2(\mathrm{L}p)^2, \quad \aleph(3) = 0, \quad \aleph(4) = a^4(\mathrm{L}p)^4, \quad \ldots,$$

ce qui donne

$$Z_1 = 1 + a^2(\mathrm{L}p)^2\frac{t^2}{1^{2|1}} + a^4(\mathrm{L}p)^4\frac{t^4}{1^{4|1}} + \cdots,$$

$$Z_2 = \frac{t}{1} + a^2(\mathrm{L}p)^2\frac{t^3}{1^{3|1}} + a^4(\mathrm{L}p)^4\frac{t^5}{1^{5|1}} + \cdots.$$

On voit que ces deux séries représentent le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique divisé par $a\mathrm{L}p$, trouvés plus haut, (λ). D'après cela, nous obtenons pour la fonction $r\psi$ l'expression

$$r\psi = \sum\left[\frac{1}{1^{\sigma|1}}\left(\frac{d^\sigma \cos at\mathrm{L}p}{dp^\sigma}\right)_0 \mathrm{F}_1(r+\sigma) + \frac{1}{1^{\sigma|1}}\left(\frac{d^\sigma \frac{\sin at\mathrm{L}p}{a\mathrm{L}p}}{dp^\sigma}\right)_0 \mathrm{F}_2(r-\sigma)\right].$$

Il reste à calculer les dérivées des cosinus et sinus hyperboliques; par

exemple, pour le cosinus, on a une expression de la forme

$$\frac{d^\sigma \cos at \mathrm{L}p}{dp^\sigma} = [(at)^\sigma + k_2(at)^{\sigma-2} + k_4(at)^{\sigma-4} + \ldots] \frac{\substack{\sin\\ \cos}(at\mathrm{L}p)}{p^\sigma}$$

$$- [k_1(at)^{\sigma-1} + k_3(at)^{\sigma-3} + k_5(at)^{\sigma-5} + \ldots] \frac{\substack{\cos\\ \sin}(at\mathrm{L}p)}{d^\sigma},$$

$k_1, k_2, k_3, \ldots$ sont des coefficients numériques que l'on déterminerait au moyen des formules (96), (96)′, (96)″, à moins que l'on n'en aperçoive directement la formation, ce qui est facile. Nous indiquons par sin et cos superposés que la fonction est un sinus ou un cosinus, ou inversement. Or, si $p = 0$, il vient $\mathrm{L}p = -\infty$, $\substack{\sin\\ \cos}(at\mathrm{L}p)$ tend vers $\pm \frac{1}{2} e^{-at\mathrm{L}p}$ ou $\pm \frac{1}{2} p^{at}$, et $\substack{\cos\\ \sin}(at\mathrm{L}p)$ tend vers $\mp \frac{1}{2} e^{-at\mathrm{L}p}$ ou $\mp \frac{1}{2} p^{at}$, ce qui donne, pour l'expression précédente,

$$\pm \frac{1}{2} [(at)^\sigma + k_1(at)^{\sigma-1} + k_2(at)^{\sigma-2} + \ldots] \frac{p^{at}}{p^\sigma}.$$

D'après la formation des coefficients k, le développement entre crochets n'est autre que la factorielle

$$(at + \sigma - 1)(at + \sigma - 2)\ldots at = at^{\sigma|-1};$$

ainsi, quand p tend vers zéro,

$$\frac{1}{1^{\sigma|1}} \frac{d^\sigma \cos at \mathrm{L}p}{dp^\sigma}$$

tend vers

$$\pm \frac{1}{2} \frac{at^{\sigma|-1}}{1^{\sigma|1}} \frac{p^{at}}{p^\sigma},$$

et, comme cette expression a lieu quel que soit σ, elle ne sera ni nulle ni infinie si $\sigma = at$. On a donc $\pm \frac{1}{2} \mathrm{F}_1(r + at)$ pour la première partie de la somme composant la fonction $r\psi$; on peut regarder le coefficient $\pm \frac{1}{2}$ comme appartenant à la fonction arbitraire F_1. En opérant d'une manière analogue pour la seconde partie de la même somme, on aboutirait définitivement à l'expression (2)′ déjà trouvée.

2° *Détermination des quantités qui entrent dans l'intégrale générale.* — La fonction ψ étant déterminée, il reste à calculer la fonction f, ou plutôt la dérivée $\frac{df}{dr} = V$. Partant de

$$(\mu) \qquad \psi = \frac{1}{r}[F_1(r+at) + F_2(r-at)]$$

et faisant

$$(\mu)' \qquad \frac{d\psi}{dr} = \zeta, \quad \frac{d\psi}{dt} = \eta,$$

on a

$$(\nu) \quad \zeta = \frac{1}{r}\left[\frac{dF_1(r+at)}{dr} + \frac{dF_2(r-at)}{dr}\right] - \frac{1}{r^2}[F_1(r+at) + F_2(r-at)],$$

$$(\nu)' \qquad \eta = \frac{a}{r}\left[\frac{dF_1(r+at)}{dt} - \frac{dF_2(r-at)}{dt}\right];$$

les dérivées $\frac{d\zeta}{dr}$, $\frac{d^2\zeta}{dr^2}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\eta}{dr}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt\,dr}$, $\frac{d^2\eta}{dr^2} = \frac{d^2\zeta}{dt\,dr}$ s'obtiendraient aisément. Ensuite, la fonction que nous avons généralement notée par $\varphi(w)$, et qui est ici $\varphi(\psi)$, deviendra, en écrivant l'équation réduite sous la forme

$$\frac{d\eta}{dt} - a^2\left(\frac{d\zeta}{dr} + \frac{2}{r}\zeta\right) = 0,$$

$$\varphi(\psi) = \frac{d\eta}{dt} + 2\frac{d\eta}{dr}\zeta + \frac{d\zeta}{dr}\zeta^2 + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left(\eta + \frac{1}{2}\zeta^2\right)\frac{d\eta}{dt};$$

Posons, pour abréger,

$$U = \eta + \tfrac{1}{2}\zeta^2;$$

la fonction précédente devient, en vertu de (ν) et $(\nu)'$,

$$(\xi) \qquad \varphi(\psi) = \frac{dU}{dt} + \zeta\frac{dU}{dr} + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)U\frac{d\eta}{dt}$$

et, par suite,

$$(\sigma)\quad \frac{d\varphi(\psi)}{dt} = \frac{d^2U}{dt^2} + \zeta\frac{d^2U}{dt\,dr} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dU}{dr} + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left[U\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{dU}{dt}\frac{d\eta}{dt}\right],$$

$$(\sigma')\quad \frac{d\varphi(\psi)}{dr} = \frac{d^2U}{dt\,dr} + \zeta\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{d\zeta}{dr}\frac{dU}{dr} + \left(\frac{c}{c'} - 1\right)\left[U\frac{d^2\eta}{dt\,dr} + \frac{dU}{dr}\frac{d\eta}{dt}\right].$$

Au moyen de ces quantités on peut calculer la fonction $\Phi(f)$ de (ξ), en réduisant le développement aux deux premiers termes, savoir :

$$\Phi(f) = \Phi(\psi) - \varphi(\psi)\frac{\left(\frac{d\Phi(\psi)}{d\psi}\right)}{\left(\frac{d\varphi(\psi)}{d\psi}\right)},$$

et l'on a

$$\left(\frac{d\varphi(\psi)}{d\psi}\right) = \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\frac{1}{\frac{d\psi}{dt}} + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\frac{1}{\frac{d\psi}{dr}} = \frac{1}{\eta\zeta}\left[\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta\right],$$

d'où, pour $\Phi(f) = f$,

$$(\varpi)\qquad f = \psi - \varphi(\psi)\frac{\eta\zeta}{\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta}.$$

Si l'on fait encore

$$\Phi(f) = \frac{df}{dr} = V,$$

on a

$$\left(\frac{d\Phi(\psi)}{d\psi}\right) = \frac{1}{\eta\zeta}\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)\eta\right];$$

il vient donc, pour la fonction cherchée V,

$$(\rho)\qquad V = \zeta - \varphi(\psi)\frac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)\eta}{\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta}.$$

Quant à la condensation γ, en mettant les dérivées de ψ à la place de celles de f dans l'équation $(\theta)'$, et appelant s la quantité que l'on obtient alors au lieu de γ, et qui sera la valeur fondamentale de cette dernière quantité, on obtient

$$(\sigma) \qquad s = \left(\frac{-U}{b^2}\right)^{\frac{1}{\frac{c}{c'}-1}} - 1,$$

en faisant, pour simplifier,

$$(\sigma)' \qquad b^2 = \frac{a^2}{\frac{c}{c'} - 1}.$$

D'après un calcul connu, on trouverait l'expression plus simple

$$(\sigma) \qquad s = -\frac{\tau_1}{a^2},$$

que l'on pourrait prendre également pour valeur fondamentale.

On a enfin, comme il est facile de le voir, par (σ) ou $(\sigma)'$,

$$(\rho) \qquad \gamma = s - \frac{b^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-1} - \tau_1 + \frac{1}{2}\tau_2^2}{a^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-2}}.$$

Les deux quantités V et γ qu'il s'agissait de calculer sont ainsi données par (ρ) et $(\rho)'$.

3° *Détermination des fonctions arbitraires.* — En dernier lieu, nous avons à déterminer les fonctions arbitraires. Si tout est symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire par rapport au centre d'ébranlement, celui-ci devant rester immobile, il faut que les quantités f et V soient nulles pour $r = 0$, ce qui donne, d'après (ϖ) et (ρ),

$$(\varpi) \qquad \left\{\begin{aligned} &\zeta\left[\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta\right] - \varphi(\psi)\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)\eta\right] = 0, \\ &\psi\left[\left(\frac{d\varphi(\psi)}{dt}\right)\zeta + \left(\frac{d\varphi(\psi)}{dr}\right)\eta\right] - \varphi(\psi)\eta\zeta = 0, \end{aligned}\right\} \text{ pour } r = 0.$$

On a ainsi deux relations auxquelles doivent satisfaire les fonctions arbitraires F_1 et F_2 qui sont impliquées dans la fonction ψ et, par suite, dans η et ζ. En outre, les valeurs initiales sont données pour $t = 0$; on a donc

$$(\tau) \qquad V_0 = \Psi_1(r), \quad \gamma_0 = \Psi_2(r).$$

Puisque les fonctions $\Psi_1(r)$ et $\Psi_2(r)$ sont données, ces deux conditions déterminent complètement les fonctions arbitraires F_1 et F_2. Mais ici nous ne trouvons pas le cas ordinaire dont nous avons parlé : les valeurs initiales ne correspondent pas aux valeurs moyennes adoptées, parce que nous avons voulu utiliser, comme équation réduite, une équation déterminée (ι). Les valeurs moyennes dont nous avons fait usage se présentaient d'ailleurs naturellement. De là résulte que la fonction inconnue ne se réduit pas à la valeur fondamentale lorsque l'on donne aux variables les valeurs qui correspondent à l'état initial.

La détermination des fonctions arbitraires exige alors la résolution d'un système d'équations simultanées qui est, d'après (ρ) et (ρ') et (ς),

$$(\tau') \qquad \begin{cases} \Psi_1(r) = \zeta_0 - \varphi(\psi_0)\dfrac{\left(\dfrac{d\zeta_0}{dt}\right)\zeta_0 + \left(\dfrac{d\zeta_0}{dr}\right)\eta_0}{\left(\dfrac{d\varphi(\psi_0)}{dt}\right)\zeta_0 + \left(\dfrac{d\varphi(\psi_0)}{dr}\right)\eta}, \\[2ex] \Psi_2(r) = s_0 - \dfrac{b^2(1+s_0)^{\frac{c}{c}-1} + \eta_0 + \frac{1}{2}\zeta_0^3}{a^2(1+s_0)^{\frac{c}{c}-2}}. \end{cases}$$

Les inconnues F_1, F_2 sont comprises dans les fonctions ψ_0, η_0, ζ_0 et s_0. La résolution de ce système, quoique compliquée, est possible, comme nous le montrerons plus loin; il suffit pour l'instant d'observer que, par l'application de la méthode secondaire, les fonctions F_1 et F_2, exprimées au moyen des fonctions Ψ_1 et Ψ_2, exigeront la connaissance de premières valeurs approchées qui seront leurs valeurs fondamentales.

Soient $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ les valeurs fondamentales de F_1 et de F_2 que nous déterminerons en substituant ζ_0 et s_0 à V_0 et γ_0 dans (ς); on a, d'après un calcul de Poisson, en tenant compte de (ν), (ν') et (σ'), puis en-

remplaçant F par $\mathfrak{F}$ et faisant $t = 0$ après les dérivations,

$$(\tau)'' \quad \begin{cases} \Psi_1(r) = \frac{1}{r}\left[\frac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dr} + \frac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dr}\right] - \frac{1}{r^2}[\mathfrak{F}_1(r) + \mathfrak{F}_2(r)], \\ \Psi_2(r) = \frac{-1}{ar}\left[\frac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dt} - \frac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dt}\right]. \end{cases}$$

La seconde relation peut s'écrire

$$(\varphi) \qquad r\Psi_2(r) = -\frac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dr} + \frac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dr},$$

et, intégrant, il vient

$$(\varphi)_1 \qquad \int r\Psi_2(r) = -\mathfrak{F}_1(r) + \mathfrak{F}_2(r);$$

quant à la première, elle donne par intégration

$$(\varphi)' \qquad r\int\Psi_1(r)dr = \mathfrak{F}_1(r) + \mathfrak{F}_2(r),$$

d'où

$$(\varphi)'_1 \qquad \int\Psi_1(r)dr + r\Psi_1(r) = \frac{d\mathfrak{F}_1(r)}{dr} + \frac{d\mathfrak{F}_2(r)}{dr}.$$

Il n'est pas nécessaire de tenir compte ici des constantes d'intégration. (φ), $(\varphi)_1$, $(\varphi)'$ et $(\varphi)'_1$ donnent alors

$$(\chi) \quad \begin{cases} 2\mathfrak{F}_1(r) = r\int\Psi_1(r)dr - \int r\Psi_2(r)dr, \\ 2\mathfrak{F}_2(r) = r\int\Psi_1(r)dr + \int r\Psi_2 r\,dr, \\ 2\frac{d\mathfrak{F}_1 r}{dr} = \int\Psi_1(r)dr + r[\Psi_1(r) - \Psi_2(r)], \\ 2\frac{d\mathfrak{F}_2 r}{dr} = \int\Psi_2(r)dr + r[\Psi_1(r) + \Psi_2(r)]. \end{cases}$$

Nous avons de cette manière les valeurs fondamentales $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ des deux fonctions arbitraires F_1, F_2, ainsi que leurs dérivées.

On peut maintenant résoudre par rapport à F_1 et F_2 le système des deux équations simultanées (τ) et déterminer les fonctions arbitraires, comme nous l'indiquerons plus loin.

Nous pouvons donc considérer comme achevée dès à présent l'intégration complète des équations (6) et (6'), la première étant une équation aux dérivées partielles du second ordre à coefficients variables qui jusqu'à présent avait résisté aux méthodes ordinaires. En effet, nous devions appliquer l'expression fondamentale (68) ou (9); pour cela, choisissant une fonction qui donnait déjà pour la vitesse V la solution d'une manière très approchée, nous avons calculé les éléments constituant le second terme de l'expression (9), de sorte que nous pourrions encore, sans rencontrer d'autres difficultés que la longueur des calculs, obtenir successivement les autres termes de cette expression. Nous aurions ainsi, avec une approximation aussi grande qu'on pourrait le désirer, les valeurs de la fonction inconnue sans omettre ou restreindre aucune des conditions du problème. C'est là un *desideratum* que l'on devait s'efforcer d'obtenir, car les fonctions cherchées étant, par la nature de la question, des fonctions transcendantes, nous ne pouvons espérer les connaître que par une suite successive et indéfinie d'approximations.

La forme technique de la solution que nous avons obtenue ne se prête pas aussi facilement à une discussion qu'une forme purement théorique; cependant il est possible de reconnaître la propagation uniforme du mouvement ondulatoire.

Néanmoins, si l'on rencontrait des résultats qui paraissent être en contradiction avec des faits reconnus, on ne devrait pas conclure que le système d'intégration soit en défaut. Par exemple, on a observé dernièrement que les ondes sonores, produites dans certaines conditions au moyen d'étincelles électriques, se propagent avec une vitesse plus grande, près du centre d'ébranlement, qu'un peu au delà. Il est visible que la solution, telle que nous l'avons obtenue, ne peut rendre compte d'un pareil fait, car les équations (6), (6') supposent qu'il n'y a pas propagation de chaleur, tandis que la chaleur produite par l'étincelle au centre d'ébranlement doit forcément se propager dans les couches voisines.

D'ailleurs la supposition d'un rapport sensiblement constant pour les chaleurs spécifiques, bien que vérifiée dans les limites étendues de température, ne serait plus admissible dans ce cas, à cause de la température extrême qui est développée par l'étincelle; on se trouve

bien au delà des limites pour lesquelles la constance du rapport $\frac{c}{c'}$ a été reconnue. De plus, si l'on se reportait à la critique très juste de Wronski, critique que l'on trouve à la fin de son Ouvrage des *Nouveaux systèmes de machines à vapeur*, on verrait que les deux chaleurs spécifiques c et c' dépendent de quantités de chaleur essentiellement différentes que l'on confond encore communément; d'où il résulte que la relation (α') est non seulement empirique, mais encore fausse en principe; cette erreur se transmet nécessairement dans le résultat de l'intégration, mais il est clair qu'elle ne fausse pas l'intégration même, question de calcul qui seule doit nous occuper ici.

L'exemple traité nous a paru très propre à faire saisir l'esprit de la méthode de Wronski; il montre de quelle manière, à l'avenir, on pourra utiliser les solutions approchées dont on a dû se contenter dans la plupart des cas, pour en déduire les solutions complètes de problèmes que l'on pouvait croire presque insolubles.

RÉSOLUTION ET INTÉGRATION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES.

Nous venons de donner l'intégration des équations aux différences ou aux différentielles partielles à coefficients quelconques; il nous reste, pour compléter l'exposition de la méthode, à considérer le cas plus général où les équations à résoudre ou à intégrer forment des systèmes d'équations simultanées.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m$, m fonctions de n quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ considérées comme inconnues, de ν quantités données $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$, pouvant varier à volonté, et d'un nombre quelconque de quantités constantes que nous ne désignons pas.

Soient de plus m relations qui forment les équations du problème et que nous écrirons

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\\
&\varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_m(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0.
\end{aligned}$$

D'après ces relations, les inconnues étant fonctions des variables

indépendantes et des quantités constantes sont aussi fonctions les unes des autres; cette remarque est essentielle pour ce qui va suivre.

Nous avons admis que le nombre des relations pouvait différer de celui des inconnues : si $\lambda > m$, $\lambda - m$ inconnues ne peuvent être déterminées, et si $\lambda < m$, il faut, pour que le problème soit possible, que $m - \lambda$ relations rentrent dans les λ autres. Ainsi, pour satisfaire généralement au problème, il faut dans le premier cas, $\lambda > m$, que $\lambda - m$ quantités inconnues y soient assimilées aux quantités variables indépendantes x, et dans le deuxième cas, $\lambda < m$, que $m - \lambda$ équations soient considérées comme superflues, à moins que $m - \lambda$ quantités x supposées indépendantes puissent recevoir des déterminations de la même manière que les inconnues. Nous pouvons donc supposer le nombre des inconnues égal au nombre des équations et celles-ci entièrement distinctes; nous aurons alors, au lieu du système d'équations précédent, le système

$$(100)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0, \\ \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_\lambda) = 0. \end{array}\right.$$

On peut admettre que certaines inconnues n'entrent pas dans toutes les équations.

Il faut remarquer que nous ne considérons ici que les équations prises en elles-mêmes, c'est-à-dire, abstraction faite des problèmes possibles dont elles ne sont que la traduction; aussi, en vue du cas ordinaire de la pratique, où les inconnues sont généralement susceptibles d'être déterminées, devions-nous prendre un nombre d'équations égal à celui des inconnues.

Cela posé, dans le cas d'équations qui contiennent des différences ou des différentielles des inconnues, il y a toujours au moins une quantité x variable indépendante qui se trouve être ainsi variable commune; mais, dans le cas d'équations primitives, c'est-à-dire, d'équations dans lesquelles les différences ou les différentielles des inconnues n'entrent pas, il n'existe pas de variable commune, ou plutôt on ne considère pas, dans la résolution, les variations des quantités indépendantes qui peuvent exister; ces quantités sont ordinairement traitées comme

des constantes. Dans la méthode présente, il convient de tenir compte d'une variable commune pour exprimer les dérivées des inconnues qui entrent dans l'expression fondamentale. Si les équations ne contiennent pas une quantité qui soit naturellement désignée pour cet objet, on pourra prendre, pour en tenir lieu, une quantité qui entre à la fois dans toutes les équations, l'une des inconnues par exemple; ou bien, on introduira convenablement dans toutes les équations une quantité arbitraire en facteur ou en exposant, comme nous l'avons fait pour la quantité ω dans la formation des équations réduites. Il est clair, à cause de la dépendance de toutes les quantités, que cette manière d'opérer ne doit rien changer au résultat définitif, pourvu que l'on donne à la variable commune, après les opérations effectuées, la valeur qu'elle a dans les équations proposées.

Maintenant, dans le cas d'équations primitives à résoudre, pour déterminer l'une des inconnues y_α, ou mieux une fonction donnée $F(y_\alpha)$ de cette inconnue, laquelle représentera, pour abréger, la fonction

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_\alpha, \ldots, y_\lambda),$$

puisque nous supposons par les relations (100) que $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ sont des fonctions de y_α, nous choisirons l'une des équations du système

$$\varphi_\beta(y_1, y_2, \ldots, y_\alpha, \ldots, y_\lambda) = 0, \tag{101}$$

qui paraîtra la plus favorable pour cet objet; autrement l'une quelconque des équations pourrait convenir. En considérant les inconnues autres que y_α comme fonctions de cette inconnue particulière, nous pouvons écrire ainsi l'équation (101)

$$\varphi_\beta(y_\alpha) = 0, \tag{102}$$

pour nous conformer aux notations précédentes, et l'expression fondamentale donne

$$\left\{\begin{aligned} F(y_\alpha) &= F(w_\alpha) - \varphi_\beta(w_\alpha)\frac{dF(w_\alpha)}{d\varphi_\beta(w_\alpha)} \\ &\quad + \frac{1}{2}[\varphi_\beta(w_\alpha)]^2\frac{d\varphi_\beta(w_\alpha)\,d^2F(w_\alpha) - d^2\varphi_\beta(w_\alpha)\,dF(w_\alpha)}{[d\varphi_\beta(w_\alpha)]^3} \cdots \end{aligned}\right. \tag{103}$$

D'après ce qui a été dit, ϖ_α est une fonction généralement *quelconque* de la variable indépendante, mais pratiquement cette fonction doit être aussi rapprochée que possible de l'inconnue y_α pour que l'expression précédente soit suffisamment convergente. Nous avons fait voir que cette fonction ϖ_α se déduisait ordinairement d'équations réduites; nous y reviendrons tout à l'heure.

Les différentielles des fonctions F et φ_β sont prises par rapport à l'inconnue y_α, à laquelle on substitue ensuite sa valeur fondamentale ϖ_α. Il faut tenir compte, dans le calcul de ces différentielles, de ce que les autres inconnues sont fonctions de l'inconnue particulière y_α par l'intermédiaire de la variable commune x; on voit ainsi l'utilité de cette variable commune.

Prenant donc les dérivées des fonctions F et φ_β par rapport à x, l'expression précédente devient

$$103_{\text{bis}}\left\{\begin{aligned} F(y_\alpha) &= F(\varpi_\alpha) - \varphi_\beta(\varpi_\alpha)\,\frac{\left(\dfrac{dF(\varpi_\alpha)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(\varpi_\alpha)}{dx}\right)} \\ &- \frac{1}{2}\,\varphi_\beta(\varpi_\alpha)^2\,\frac{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(\varpi_\alpha)}{dx}\right)\left(\dfrac{d^2F(\varpi_\alpha)}{dx^2}\right) - \left(\dfrac{d^2\varphi_\beta(\varpi_\alpha)}{dx^2}\right)\left(\dfrac{dF(\varpi_\alpha)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(\varpi_\alpha)}{dx}\right)^3} - \ldots \end{aligned}\right.$$

Nous indiquons par des parenthèses que les dérivées des fonctions F et φ_β sont prises seulement par rapport à l'inconnue y_α et par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$, fonctions de cette dernière quantité.

L'expression (103) est aussi applicable aux équations qui contiennent des différences ou des différentielles des inconnues; mais, s'il y avait des différences ou des différentielles partielles, il conviendrait de transformer l'expression (103) et de la mettre sous la même forme que l'expression (68).

Calcul des dérivées. — Le calcul des dérivées qui entrent dans (103) exige, comme nous venons de le dire, la connaissance des dérivées suivantes :

$$\frac{dy_1}{dy_\alpha},\quad \frac{dy_2}{dy_\alpha},\quad \ldots,\quad \frac{dy_\alpha}{dy_\alpha},\quad \frac{d^2y_1}{dy_\alpha^2},\quad \frac{d^2y_2}{dy_\alpha^2},\quad \ldots,\quad \frac{d^2y_\lambda}{dy_\alpha^2},\quad \ldots,\quad \text{etc.}$$

et se ramène à la détermination des dérivées de toutes les inconnues par rapport à la variable commune x.

Ces dérivées s'obtiendront généralement au moyen des dérivées totales des équations proposées, lesquelles présenteront un système d'équations du premier degré par rapport aux quantités cherchées, d'où l'on déduira facilement les dérivées en question.

Ainsi, en reprenant l'équation (101) ou (102), supposée primitive, que nous écrirons pour simplifier $\varphi = 0$, et en indiquant par des indices correspondant aux variables le résultat de la différentiation effectuée sur la fonction φ, une première différentiation donne

$$\varphi_0 dx + \varphi_1 dy_1 + \varphi_2 dy_2 + \ldots + \varphi_\lambda dy_\lambda = 0,$$

ou, en prenant les dérivées par rapport à x,

$$\varphi_0 + \varphi_1 \frac{dy_1}{dx} + \varphi_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \varphi_\lambda \frac{dy_\lambda}{dx} = 0. \tag{105}$$

En opérant de même sur les autres équations proposées, nous aurions $\lambda - 1$ autres équations de même forme que (105), c'est-à-dire du premier degré par rapport aux dérivées cherchées, lesquelles avec (105) permettraient de déterminer les dérivées du premier ordre des inconnues. Le véritable motif d'introduction de la variable auxiliaire x se voit ici clairement.

Une seconde dérivation donne un second système de λ équations de la forme

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0} + \varphi_{1,0}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \varphi_{\lambda,0}\frac{dy_\lambda}{dx} + \left(\varphi_{0,1} + \varphi_{1,1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \varphi_{\lambda,1}\frac{dy_\lambda}{dx}\right)\frac{dy_1}{dx} \\ + \ldots + \left(\varphi_{0,\lambda} + \varphi_{1,\lambda}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \varphi_{\lambda,\lambda}\frac{dy_\lambda}{dx}\right)\frac{dy_\lambda}{dx} \\ + \varphi_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \varphi_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \ldots + \varphi_\lambda \frac{d^2 y_\lambda}{dx^2} = 0.\end{aligned}$$

Les dérivées premières étant supposées déjà déterminées, l'ensemble des termes où elles entrent peut être représenté par Φ, ce qui réduit l'équation précédente à

$$\Phi + \varphi_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \varphi_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \ldots + \varphi_\lambda \frac{d^2 y_\lambda}{dx^2} = 0. \tag{105'}$$

Cette équation avec $\lambda - 1$ autres que l'on obtiendrait de la même manière forment un système d'équations du premier degré par rapport aux dérivées secondes des inconnues d'où il est facile de déduire ces quantités.

Les dérivées des ordres supérieurs s'obtiendraient en suivant le même procédé. Après ces opérations effectuées, on change $y_1, y_2, \ldots$ en w_1, $w_2, \ldots$ pour composer l'expression (103)$_1$.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que le système des équations conjointes (100) était formé d'équations primitives; mais, si ces équations contenaient des différences ou des différentielles des inconnues, il suffirait de considérer ces différences ou ces différentielles comme des fonctions des valeurs fondamentales $w_1, w_2, \ldots, w_\lambda$, et d'appliquer le procédé indiqué pour les équations primitives; on considérerait aussi les inconnues comme fonctions de l'une d'entre elles dans chacune des équations du système.

Si l'on a deux équations différentielles, réduites au premier ordre pour plus de simplicité, de la forme suivante :

$$\frac{dy_1}{dx}\mathrm{A} + \frac{dy_2}{dx}\mathrm{B} + \mathrm{C} = 0,$$

où A, B, C peuvent être des fonctions de y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$ et x, on aura, en différentiant,

$$\left(\frac{d\mathrm{C}}{dx}\right) + \left[\left(\frac{d\mathrm{A}}{dx}\right) + \left(\frac{d\mathrm{C}}{dy_1}\right)\right]\frac{dy_1}{dx} + \left[\left(\frac{d\mathrm{B}}{dx}\right) + \left(\frac{d\mathrm{C}}{dy_2}\right)\right]\frac{dy_2}{dx} + \left(\frac{d\mathrm{A}}{dy_1}\right)\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2$$
$$+ \left[\left(\frac{d\mathrm{A}}{dy_2}\right) + \left(\frac{d\mathrm{B}}{dy_1}\right)\right]\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx} + \left(\frac{d\mathrm{B}}{dy_2}\right)\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2 + \mathrm{A}\frac{d^2y_1}{dx^2} + \mathrm{B}\frac{d^2y_2}{dx^2} = 0.$$

En remplaçant les inconnues y_1, y_2, ainsi que $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, par leurs valeurs fondamentales, les quantités w_1, w_2, $\frac{dw_1}{dx}$, $\frac{dw_2}{dx}$ seront connues : il ne restera dans cette équation que les deux dérivées inconnues $\frac{d^2w_1}{dx^2}$, $\frac{d^2w_2}{dx^2}$, au premier degré seulement. Une seconde équation semblable, provenant de la seconde équation proposée, que nous n'avons pas écrite, permettrait d'obtenir ces deux dérivées secondes par la résolution d'équations du premier degré.

Les dérivées d'ordres supérieurs s'obtiendraient par le même moyen en différentiant encore les mêmes équations.

Si l'on a deux équations aux différences finies de la forme

$$\Delta y_1 A + \Delta y_2 B + C = 0,$$

où A, B, C peuvent être des fonctions de y_1, y_2, Δy_1, Δy_2 et x (nous ne considérons encore que le premier ordre pour plus de simplicité), on obtient, en différentiant,

$$\begin{aligned}\Delta y_1\left(\frac{dA}{dx}\right) + \frac{d\Delta y_1}{dx}A + \Delta y_2\left(\frac{dB}{dx}\right) + \frac{d\Delta y_2}{dx}B + \left(\frac{dC}{dx}\right)\\ + \left[\Delta y_1\left(\frac{dA}{dy_1}\right) + \Delta y_2\left(\frac{dB}{dy_1}\right) + \left(\frac{dC}{dy_1}\right)\right]\frac{dy_1}{dx}\\ + \left[\Delta y_1\left(\frac{dA}{dy_2}\right) + \Delta y_2\left(\frac{dB}{dy_2}\right) + \left(\frac{dC}{dy_2}\right)\right]\frac{dy_2}{dx} = 0.\end{aligned}$$

En remplaçant les inconnues y_1, y_2, ainsi que Δy_1, Δy_2, par leurs valeurs fondamentales, les quantités w_1, w_2, Δw_1, Δw_2 seront connues : il ne restera dans cette équation que les deux dérivées $\frac{dw_1}{dx}$, $\frac{dw_2}{dx}$ au premier degré seulement [1]. Une équation semblable, déduite de la seconde équation proposée que nous n'avons pas écrite, permettrait de déterminer les dérivées cherchées par un système d'équations linéaires. Les dérivées d'ordres supérieurs s'obtiendraient encore facilement.

S'il s'agissait d'équations aux différences ou aux différentielles partielles, on calculerait par le même moyen les dérivées partielles qui entrent dans l'expression fondamentale, celle-ci prenant la forme (68).

Ainsi, pour deux équations différentielles de la forme

$$\frac{dy_1}{dx_1}A + \frac{dy_1}{dx_2}B + \frac{dy_2}{dx_1}C + \frac{dy_2}{dx_2}D + E = 0,$$

où A, B, C, D, E peuvent être des fonctions de y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx_1}$, $\frac{dy_1}{dx_2}$, $\frac{dy_2}{dx_1}$,

---

[1] Les dérivées des différences Δw étant substituées aux dérivées de Δy, et Δw étant une fonction de x, d'après la valeur fondamentale w, nous avons considéré Δy comme une fonction immédiate de x dans la relation précédente.

$\frac{dy_2}{dx_2}$, x_1 et x_2, on prendrait la différentielle totale du premier membre de l'équation; puis, remplaçant les différentielles de y_1 et y_2 par leurs expressions considérées comme fonctions de x_1 et x_2, savoir

$$dy_1 = \frac{dy_1}{dx_1}dx_1 + \frac{dy_1}{dx_2}dx_2,$$

$$dy_2 = \frac{dy_2}{dx_1}dx_1 + \frac{dy_2}{dx_2}dx_2,$$

$$d^2y_1 = \frac{d^2y_1}{dx_1^2}dx_1^2 + 2\frac{d^2y_1}{dx_1dx_2}dx_1dx_2 + \frac{d^2y_1}{dx_2^2}dx_2^2,$$

$$d^2y_2 = \frac{d^2y_2}{dx_1^2}dx_1^2 + 2\frac{d^2y_2}{dx_1dx_2}dx_1dx_2 + \frac{d^2y_2}{dx_2^2}dx_2^2,$$

et ainsi de suite, la différentielle totale égalée à zéro se partagerait, à cause de l'indépendance des variables x_1 et x_2, en autant d'équations qu'il est nécessaire d'en avoir pour déterminer les dérivées partielles du second ordre des mêmes inconnues, en tenant compte toutefois de la seconde équation simultanée non écrite. Remplaçant ensuite les inconnues y_1, y_2 et leurs premières dérivées par leurs valeurs fondamentales, il ne resterait plus, dans les équations dont il s'agit, que les dérivées partielles du second ordre $\frac{d^2w_1}{dx_1^2}$, $\frac{d^2w_1}{dx_1^2}$, $\cdots$ entrant au premier degré; ces dernières dérivées s'en déduiraient facilement.

Enfin, si l'on avait des équations simultanées aux différences partielles, on opérerait d'une manière tout à fait semblable pour obtenir les dérivées partielles du premier ordre ou des ordres supérieurs qui entrent dans l'expression fondamentale (68).

En résumé, les dérivées des inconnues, dont on a besoin pour former l'expression fondamentale de la fonction cherchée, peuvent dans tous les cas être obtenues par la résolution de systèmes d'équations linéaires. Il faudra généralement recourir à cette résolution; car, bien que les dérivées dont il s'agit puissent être déduites des valeurs fondamentales, celles-ci pourraient conduire à des résultats s'écartant beaucoup des valeurs véritables, et la convergence de l'expression fondamentale serait difficile à obtenir.

Détermination des valeurs fondamentales et des quantités arbitraires. — Pour achever la résolution ou l'intégration d'un système d'équations

simultanées, il reste à montrer comment on peut obtenir les valeurs fondamentales w_1, w_2, ... des inconnues, puis comment on peut déterminer les fonctions ou constantes arbitraires d'intégration. La question ne présente plus de difficultés d'après ce qui a été dit dans le cas d'équations non simultanées, la marche à suivre étant la même.

Ainsi, on formera un système d'équations réduites pour déterminer les valeurs fondamentales et leurs dérivées, à moins que celles-ci ne soient connues d'avance, ce qui arrivera quelquefois, en faisant usage de considérations particulières aux problèmes que l'on aura à traiter.

Pour former les équations réduites, on introduit dans chacune des équations du système (100) une quantité arbitraire ω, soit en facteur, soit en exposant, de manière qu'en faisant ces diverses quantités ω égales à zéro, on obtienne des équations résolubles ou intégrables par les procédés ordinaires (c'est le système des équations réduites), et qu'en faisant ces quantités égales à l'unité on retombe sur les équations proposées.

Les équations réduites peuvent former des équations contenant séparément les inconnues ou des systèmes d'équations simultanées. Ces équations doivent nécessairement présenter des solutions de même nature que les équations proposées. Par exemple, dans le cas d'intégrations, les équations réduites devront être de même ordre que les équations proposées, pour qu'il puisse être introduit autant de constantes ou de fonctions arbitraires que les équations proposées en comportent. Il est toujours possible de former un système d'équations réduites faciles à résoudre, les quantités auxiliaires ω permettant de remplacer, dans les termes des équations proposées, certaines fonctions par des constantes égales aux valeurs moyennes de ces fonctions, quand on considère leurs variations entre des limites déterminées. Le moyen général consistera à composer, comme on l'a fait dans le cas d'intégrations, des équations linéaires à coefficients constants toujours intégrables par des moyens connus; les intégrales de ces équations, qui sont les valeurs fondamentales w_1, w_2, ..., introduisent le nombre de constantes ou de fonctions arbitraires que la question exige, de sorte que, en portant les fonctions w_1, w_2, ... dans l'expression (103), ou (68), les fonctions inconnues y_1, y_2, ... ou

$F(y_1)$, $F(y_2)$, ... contiendront le nombre voulu de constantes ou de fonctions arbitraires.

Ensuite, pour déterminer ces quantités arbitraires, il faut considérer que l'on a remplacé certaines fonctions par des constantes (ou quelquefois par des fonctions plus simples que celles qui composent les coefficients des équations), telles que, pour des valeurs déterminées des variables, les équations réduites coïncident exactement avec les équations proposées. Si donc on se reporte à ces valeurs particulières que Wronski appelle *valeurs moyennes*, les valeurs fondamentales $\omega_1, \omega_2, \ldots$, ou $F(\omega_1)$, ... représenteront exactement les fonctions inconnues y_1, y_2, ... ou $F(y_1)$, ...: on peut alors, pour ces systèmes spéciaux de valeurs, appliquer aux équations réduites les conditions du problème qui se rapportent aux équations proposées, et, par suite, on peut déterminer les constantes ou fonctions arbitraires, comme on le ferait si l'on savait traiter directement les équations proposées.

Nous dirons donc, comme nous l'avons déjà dit, que si les valeurs moyennes adoptées coïncident avec les valeurs initiales, lesquelles servent spécialement à déterminer les quantités arbitraires, on substituera les équations réduites aux équations proposées quand les variables prendront leurs valeurs initiales; les quantités arbitraires ainsi déterminées sont celles qui entrent immédiatement dans la composition des fonctions inconnues.

Si les valeurs moyennes choisies ne coïncident pas avec les valeurs initiales, les valeurs des variables indépendantes sont seules connues dans le système des valeurs moyennes; pour déterminer les valeurs correspondantes des inconnues, on peut provisoirement prendre les valeurs initiales comme valeurs moyennes et, en opérant comme il vient d'être indiqué, on calculera les fonctions inconnues correspondantes aux valeurs moyennes choisies comme on le ferait pour des valeurs quelconques déterminées. C'est ensuite que l'on pourra prendre à leur tour ces nouvelles valeurs comme valeurs initiales et déterminer les quantités arbitraires nouvelles pour ce nouveau système de valeurs initiales. On a de cette manière les quantités arbitraires qui entrent dans la composition des fonctions inconnues.

Enfin, dans le cas où l'on ne voudrait pas procéder de cette manière,

étant admis que les valeurs moyennes choisies ne coïncident pas avec les valeurs initiales, les quantités arbitraires seraient données par la résolution de systèmes d'équations primitives simultanées, ainsi que nous l'avons déjà vu. Nous n'insistons pas sur ce dernier moyen, parce que dans les applications il offre une très grande complication de calcul, seulement il faut observer que ce moyen est possible tout au moins, car l'intégration d'un système d'équations différentielles simultanées exige la résolution de plusieurs systèmes d'équations primitives simultanées, lesquels, ne comportant pas la détermination de quantités arbitraires (sauf celle des valeurs moyennes), peuvent être résolus directement.

Transformations relatives à la convergence ; remarques. — Il reste encore à considérer la convergence de l'expression fondamentale $(103)_1$ ou (68). Pour ne pas trop nous répéter, nous dirons seulement que les fonctions $w_1, w_2, \ldots$ sont totalement arbitraires en principe, mais la convergence de $(103)_1$ dépend essentiellement de l'approximation de ces valeurs fondamentales par rapport aux inconnues $y_1, y_2, \ldots$.

En premier lieu, les réduites successives (11), ou *progrès de la génération neutre*, sont plus convergentes que l'expression (3), dans laquelle on prendrait un même nombre de termes; on aura donc avantage à employer ordinairement ces réduites, en substituant $(103)_1$ à (3). On a pour les deux premières, qui sont les plus usuelles [1],

$$(106)\quad \left\{\begin{aligned} F(y_\alpha) &= Fw_\alpha - \varphi_\beta(w_\alpha)\frac{\left(\dfrac{dF(w_\alpha)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)},\\ F(y_\alpha) &= Fw_\alpha - \frac{\left(\dfrac{dF(w_\alpha)}{dx}\right)}{\dfrac{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)}{\varphi_\beta(w_\alpha)} + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\left(\dfrac{d^2F(w_\alpha)}{dx^2}\right)}{\left(\dfrac{dF(w_\alpha)}{dx}\right)} - \dfrac{\left(\dfrac{d^2\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx^2}\right)}{\left(\dfrac{d\varphi_\beta(w_\alpha)}{dx}\right)}\right\}}. \end{aligned}\right.$$

Si les équations proposées contenaient des différences ou des diffé-

[1] La troisième réduite est donnée plus loin, (107).

rentielles partielles, la transformation se ferait non sur $(103)_1$, mais sur une expression analogue à (68).

En second lieu, l'expression fondamentale est généralement très convergente pour les valeurs des fonctions inconnues qui sont peu éloignées des valeurs moyennes; on pourra donc changer de valeurs moyennes autant de fois qu'on le jugera nécessaire et calculer de cette manière toutes les valeurs des fonctions inconnues pour des variations des variables indépendantes aussi étendues qu'on le voudra.

En troisième lieu, on peut introduire des fonctions arbitraires, principalement celles de la forme se^{rx}, qui permettent d'obtenir une convergence rapide quand elles sont choisies convenablement.

En dernier lieu, on peut avoir recours à la méthode d'exhaustion, comme nous l'avons montré dans un exemple précédent.

Nous croyons utile de dire, à propos de cette méthode d'exhaustion, que Wronski distingue les méthodes suivantes [1] : les méthodes théoriques, les méthodes techniques et les méthodes d'approximation.

Dans les premières, les quantités cherchées sont données d'une manière absolue au moyen des seules données de la question, sans introduire de quantités arbitraires; la méthode suprême est dans ce cas. La propriété principale des expressions théoriques est de posséder le maximum de convergence; ces expressions sont finies quand la fonction cherchée le comporte, mais c'est un cas relativement très rare.

Nous ne pouvons indiquer ici que le caractère des méthodes théoriques, telles que les conçoit Wronski; des développements concernant la méthode suprême seraient nécessaires pour donner une idée complète de ces méthodes.

Dans les méthodes techniques, les quantités cherchées sont exprimées au moyen d'une ou plusieurs quantités arbitraires, comme cela a lieu, par exemple, dans la méthode secondaire que nous exposons.

Les expressions techniques se présentent généralement sous forme d'une suite indéfinie de termes; elles sont d'autant plus convergentes

---

[1] Nous nous plaçons ici à un point de vue particulier, autrement il faudrait citer encore (en dehors de la méthode relative à la théorie des nombres) la méthode d'interpolation qui permet de résoudre ou d'intégrer toutes sortes d'équations, étant donné un nombre suffisant de valeurs des fonctions inconnues.

que les quantités arbitraires sont mieux choisies. Les séries, suivant la définition de Wronski, sont des expressions techniques.

Le caractère distinctif des méthodes d'approximation, d'après Wronski, consiste « en ce que les accroissements successifs des différents termes qu'on calcule pour s'approcher continuellement ou indéfiniment de la quantité qu'on désire connaître, *ne sont liés par aucune loi*. C'est par là que cette méthode diffère des procédés techniques ; mais comme, dans cette méthode, les divers termes que nous venons de nommer doivent être calculés directement ou *a priori*, et non déduits par des essais ou *a posteriori*, cette méthode diffère également des simples méthodes de tâtonnement ». Ainsi une méthode d'approximation « se borne à nous conduire à des termes distincts ou séparés, de plus en plus approchants de la quantité qu'elle sert à nous faire connaître ; mais, les accroissements successifs de tous ces termes séparés n'étant liés par aucune loi, cette méthode ne saurait, par elle-même, embrasser l'ensemble de la génération des quantités ».

Sur la formation des équations différentielles. — Pour compléter la méthode secondaire, il serait utile d'ajouter quelques développements sur l'introduction des quantités arbitraires, constantes ou variables, dans les équations différentielles ; mais une question aussi importante et aussi délicate demande, pour être traitée convenablement, un espace plus considérable que celui dont nous disposons ici. Nous proposant d'y revenir plus loin, nous nous en tiendrons au résumé qui suit [1].

Nous prévenons d'abord que les équations différentielles dont nous nous occupons ne sont que les expressions de problèmes possibles ; nous ne considérerons jamais les équations qui seraient formées au hasard ou qui seraient supposées n'avoir d'autre origine.

Examinons, pour commencer, les équations qui contiennent les différentielles d'une quantité inconnue.

Ces équations sont composées essentiellement de deux choses distinctes en principe : les dérivées différentielles et les relations qui les

---

[1] Le passage suivant complète ce que nous avons dit de la formation des équations différentielles, dans la note qui sert d'introduction à l'intégration de ces équations, et rectifie en même temps ce qui a rapport au système d'équations désignées par (i).

unissent. Il faut donc considérer les dérivées différentielles en elles-mêmes, puis dans leurs relations possibles; telles sont les deux conditions premières de la question, les seules dont il faille nécessairement tenir compte.

Les dérivées seront considérées en elles-mêmes, si l'on tient compte d'une propriété qui les caractérise. Cette propriété est ici la disparition de certaines quantités par différentiation, quand ces quantités sont indépendantes des variables par rapport auxquelles on les différentie. Donc, en remontant des équations différentielles aux équations primitives, il faut rétablir les quantités qui ont disparu.

Les dérivées seront considérées dans leurs relations si l'on tient compte du mode de formation de ces relations. Or celles-ci ne proviennent que de la comparaison de quantités composées de dérivées, et toute comparaison entraîne l'élimination de certaines quantités; donc, pour passer d'une relation de dérivées différentielles à la relation équivalente de fonctions primitives, il faut rétablir les quantités qui ont disparu.

Ainsi, pour deux causes différentes, il faut introduire dans les intégrations d'équations différentielles certaines quantités qui n'existent pas dans ces équations; ces causes concourent toutes deux au même but sans que pour cela l'une puisse être substituée à l'autre. La première, qui provient de la nature des dérivées différentielles, présente une *nécessité générale*, et l'autre, qui provient du mode de formation des équations, présente une *possibilité* dépendant du *mode particulier* de formation des équations que l'on considère.

Il en résulte, d'un côté pour chaque ordre d'intégration, que l'on doit introduire généralement une fonction arbitraire (les constantes étant ici considérées comme formant un cas particulier des fonctions), et de l'autre on conçoit la possibilité d'en introduire plusieurs; le nombre de ces fonctions sera forcément indiqué dans chaque cas et ne dépendra que des conditions particulières des problèmes traités. On peut évaluer le nombre maximum des fonctions arbitraires qu'il est possible d'introduire, nombre considérable pour les équations d'ordres élevés; il suffit pour cela d'énumérer les conditions générales de formation des équations différentielles, et c'est ce que nous ferons en y joignant divers exemples.

Maintenant, si l'on distingue les conditions relatives à la formation des équations différentielles de celles qui sont relatives aux problèmes que ces équations représentent, ces deux espèces de conditions étant complètement hétérogènes, il est évident que les dernières doivent correspondre à un nombre de fonctions arbitraires compris entre le minimum et le maximum que l'on aura trouvé, pour que les problèmes soient possibles ou déterminés; mais, comme les conditions relatives aux problèmes ne peuvent être fixées *a priori*, c'est-à-dire ne peuvent l'être que dans chaque cas particulier, le nombre des fonctions arbitraires ne pourra être également fixé *a priori;* il n'y aura de déterminé que le nombre minimum de ces fonctions, lequel est nécessaire pour la possibilité des problèmes, puisque celui-ci doit être indépendant des conditions particulières, ou spéciales. Les intégrales générales seront donc celles qui contiendront le nombre minimum de fonctions arbitraires, c'est-à-dire celles qui contiendront μ fonctions arbitraires, pour l'ordre μ, car les conditions spéciales n'existent pas en général.

Le nom d'*intégrale complète* est donné aux intégrales qui ne contiennent que les valeurs initiales de la fonction inconnue et de toutes ses différentielles jusqu'à l'ordre μ, sauf l'une d'elles, qui est déterminée par l'équation même, dans le cas où l'inconnue est fonction de plusieurs variables indépendantes.

Les intégrales qui contiennent plus de μ fonctions arbitraires ne sont pas, à proprement parler, des intégrales générales, puisque, d'après ce qui précède, elles correspondent à des cas spéciaux.

Enfin, il existe d'autres sortes d'intégrales contenant des fonctions qui ne se trouvent pas dans les équations différentielles; ces fonctions ne sont plus arbitraires comme celles que nous venons de considérer, elles sont déterminées, ou partiellement déterminées, par certaines conditions qui se trouvent être remplies en dehors des conditions générales de formation des équations différentielles; c'est là leur caractère distinctif. Les intégrales désignées ordinairement sous le nom d'*intégrales singulières* sont comprises dans la précédente définition, mais celle-ci comprend une classe d'intégrales bien plus étendue. D'après cela, les intégrales semi-singulières devraient être celles qui contiennent des fonctions partiellement déterminées par des conditions singulières.

Dans le cas plus complexe d'un système d'équations simultanées, ce que nous venons de dire s'applique également. Les intégrales générales

sont les plus importantes à examiner : pour un système d'équations où les inconnues entrent respectivement aux ordres $\mu_{1,1}, \mu_{1,2}, \ldots, \mu_{1,\lambda}$ dans la première, aux ordres $\mu_{2,1}, \mu_{2,2}, \ldots, \mu_{2,\lambda}$ dans la seconde, et ainsi de suite, on pourra déterminer l'une des inconnues y_α au moyen de la $\beta^{\text{ième}}$ relation ; son ordre de différentielles le plus élevé étant $\mu_{\beta\alpha}$ d'après cette notation, il faudra introduire généralement $\mu_{\beta\alpha}$ fonctions arbitraires dans l'intégration ; mais l'intégrale obtenue comprendra d'autres inconnues $y_\gamma, y_\varepsilon, \ldots$ supposées déterminées respectivement par les relations $\varphi_\delta, \varphi_\zeta, \ldots$ où elles entrent aux ordres $\mu_{\delta\gamma}, \mu_{\zeta\varepsilon}, \ldots$, de sorte que l'intégrale qui donne y_α contiendra en tout $\mu_{\beta\alpha} + \mu_{\delta\gamma} + \mu_{\zeta\varepsilon} + \ldots$ fonctions arbitraires, et avec cette intégrale on déterminera spécialement $\mu_{\beta\alpha}$ de ces fonctions [1].

On sera ordinairement guidé dans le choix de l'équation qui devra servir à la détermination de l'une des inconnues, car il faut ne pas oublier que les ordres de différentielles des inconnues qui entrent dans les équations n'y sont pas répartis arbitrairement : ils sont au contraire disposés en vue de satisfaire aux conditions du problème que l'on traite ; mais, en supposant que ce choix ne soit pas indiqué, on pourra prendre n'importe quelle équation du système et l'on obtiendra généralement la solution voulue. Il peut arriver que le problème comporte une certaine indétermination provenant de la combinaison des équations du système proposé, ou qu'il exige des intégrales qui contiennent plus de fonctions arbitraires qu'il n'y en aurait dans l'intégrale générale ; en tout cas, il ne sera possible de trancher la question que dans chaque cas particulier.

Il y a, d'ailleurs, pour les équations différentielles simultanées une difficulté qui tient aux combinaisons possibles des équations du problème, lesquelles correspondent à des combinaisons des équations primitives ; il y a donc un nombre indéfini de systèmes équivalents d'équations primitives qui correspondent à un système donné d'équations différentielles simultanées ; le plus souvent les intégrales seront mises sous la forme $y = f(x)$, mais ce n'est là qu'une forme particu-

---

[1] Nous entendons parler de l'ordre réel des équations différentielles, et non de l'ordre fictif dû à la manière dont elles sont disposées ; le calcul des constantes des équations (37), formules (42 à 46)', dans le septième exemple que nous allons donner, précisera ce que nous disons.

hère : la forme générale est évidemment $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_\alpha) = 0$, ou plus simplement $F(y_\alpha) = 0$, d'après la notation que nous avons adoptée; l'expression fondamentale (103) tient compte de cette indétermination, qui ne peut cesser qu'à la suite de l'examen particulier du problème proposé.

Si nous examinons maintenant les équations qui contiennent des différences finies, on verrait, comme le dit Wronski, que ce que nous venons de dire des équations différentielles peut être étendu immédiatement, par une simple induction, aux équations de différences, sans autre considération que celle qui est relative à la nature des constantes arbitraires.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les équations qui contiennent des différences ou des différentielles des inconnues, mais il est visible que la méthode de Wronski peut s'appliquer aux équations qui contiennent en même temps que les inconnues des fonctions composées avec ces inconnues suivant une loi déterminée. On indique souvent les opérations successives que l'on effectue d'après la même loi sur une fonction, par un indice joint à la caractéristique de cette fonction : ce sont les équations qui contiennent des fonctions à indices que l'on pourrait résoudre sans difficulté par la méthode de Wronski. Cependant ce genre d'équations se ramène au fond à un système d'équations simultanées, et il pourra quelquefois être plus avantageux de traiter ces équations simultanées comme telles.

Ici nous terminons ce que nous avions à dire de l'ensemble de la méthode de Wronski. On trouvera peut-être un peu concises les explications qui précèdent, mais on pourra les juger suffisantes en considérant qu'elles se rapportent à l'application de principes dont nous avons constamment fait usage; d'ailleurs, les exemples et le résumé que nous allons donner encore nous permettront de revenir sur les points importants.

SUITE ET FIN DU SIXIÈME EXEMPLE.

Détermination des fonctions arbitraires. — Pour achever l'intégration de l'équation du mouvement vibratoire des gaz, il reste à déterminer les fonctions arbitraires $F_1(r + at)$ et $F_2(r - at)$.

Les deux variables, quantités essentiellement positives, sont : r, dis-

tance d'un point de la masse gazeuse au centre de vibration, et t, temps. $r + at$ est toujours positif, et $r - at$ peut être positif ou négatif. Dans le premier cas, en faisant $t = 0$, les fonctions arbitraires sont déterminées par le système des équations simultanées (τ) ou $(\tau)'$. Mais, dans le deuxième cas, $r - at$ étant négatif, on peut supposer $r = 0$, et faire $at = z$, quantité positive; on remarquera alors, d'après Poisson, que les conditions précédentes (τ) ne peuvent servir à déterminer la fonction $F_2(-z)$: il faut recourir au système d'équations (ς), et celui-ci fera connaître $F_2(-z)$ au moyen de $F_1(z)$, fonction donnée par les relations (τ), la variable z pouvant être substituée à r.

En conséquence, si l'on prend, dans l'expression fondamentale (68) ou $(\mathfrak{F})$, un nombre de termes tel qu'il faille calculer n dérivées des fonctions F_1 et F_2, il faudra, en plus des deux relations (ς), $f = 0$ et $V = 0$, pour $r = 0$, écrire $n - 1$ relations qui proviendront des $n - 1$ premières dérivées de V prises par rapport à r et égalées à zéro, en faisant ensuite $r = 0$, puisque le centre d'ébranlement est supposé immobile. On aura de cette manière un système de $n + 1$ équations simultanées d'où l'on tirera la fonction $F_2(-z)$ et ses n dérivées en fonction de $F_1(z)$ et de ses dérivées [1].

Pour résoudre ce système, on pourra prendre comme valeurs fondamentales celles qui sont données par les relations

$$F_1(z) + F_2(-z) = 0,$$

$$\frac{dF_1(z)}{dz} - \frac{dF_2(-z)}{dz} = 0,$$

que Poisson indique, et par les $n - 1$ dérivées suivantes égalées à zéro.

Mais revenons au système (τ) ou $(\tau)'$, dans lequel $F_1(r)$ et $F_2(r)$ sont déterminés au moyen des fonctions données $\Psi_1(r)$ et $\Psi_2(r)$. Si l'on compare ce système, savoir :

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1(r) - V &= 0 \\ \Psi_2(r) - \eta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

au système (100), la solution sera fournie par l'expression (103)$_1$ dans

[1] La fonction $F_2(-z)$ et ses dérivées se présentent ici sous une forme technique : il en est d'ailleurs de même de $F_1(z)$ et $F_2(z)$.

laquelle on fera

$$F(y_\alpha) = F_1(r) \quad \text{ou} \quad F_2(r),$$
$$F(w_\alpha) = \bar{\pi}_1(r) \quad \text{ou} \quad \bar{\pi}_2(r);$$

on aura donc, en prenant la première équation pour déterminer $F_1(r)$ et la seconde pour $F_2(r)$,

$$(a) \quad \begin{cases} F_1(r) = \bar{\pi}_1(r) - \dfrac{\Psi_1(r) - V'}{\left(\dfrac{d[\Psi_1(r) - V']}{d\bar{\pi}_1(r)}\right)} + \cdots, \\ F_2(r) = \bar{\pi}_2(r) - \dfrac{\Psi_2(r) - \gamma'}{\left(\dfrac{d[\Psi_2(r) - \gamma']}{d\bar{\pi}_2(r)}\right)} + \cdots; \end{cases}$$

nous mettons V' et γ' au lieu de V et γ pour marquer que l'on substitue $\bar{\pi}_1$ et $\bar{\pi}_2$ à F_1 et F_2, toujours avec la condition $t = 0$; les dérivées sont prises par rapport à $\bar{\pi}_1(r)$ et $\bar{\pi}_2(r)$ seulement, en considérant $\bar{\pi}_2(r)$ comme fonction de $\bar{\pi}_1(r)$ dans la première expression, et $\bar{\pi}_1(r)$ comme fonction de $\bar{\pi}_2(r)$ dans la seconde.

Les quantités V' et γ' doivent être remplacées par leurs valeurs, comme dans $(\tau)'$; et, puisque F_1 et F_2 sont remplacés par $\bar{\pi}_1$ et $\bar{\pi}_2$, en vertu de $(\tau)''$, on a

$$(b) \quad \begin{cases} \Psi_1(r) - \zeta' = 0, \\ \Psi_2(r) - s' = 0, \end{cases}$$

pour $t = 0$, ce qui simplifie les expressions $(\tau)'$ ou les seconds termes de (a).

Pour les dérivées de V' et de γ' par rapport à $\bar{\pi}_1$ et $\bar{\pi}_2$, il faudra prendre celles des quantités ψ, ζ et η, d'après (μ), (ν) et $(\nu)'$, par rapport à F_1 et F_2, et en faisant usage de $(\sigma)'$, savoir :

$$(b)' \qquad s = -\frac{\eta}{a^2};$$

on fera ensuite la substitution de $\bar{\pi}$ à F.

On aura donc, comme pour (ρ),

$$(c) \qquad \left(\frac{dV}{d\bar{\pi}_1}\right) = \left(\frac{d\zeta'}{d\bar{\pi}_1}\right) - \varphi(\psi') \frac{\left(\dfrac{d^2\zeta'}{dt\,d\bar{\pi}_1}\right)\zeta' + \left(\dfrac{d^2\zeta'}{dr\,d\bar{\pi}_1}\right)\eta'}{\left(\dfrac{d\varphi(\psi')}{dt}\right)\zeta' + \left(\dfrac{d\varphi(\psi')}{dr}\right)\eta'} + \cdots,$$

nous écrivons $\bar{\mathfrak{F}}$ pour $\bar{\mathfrak{F}}(r)$, pour simplifier; par suite, en substituant, dans la première expression (a), les valeurs données par $(\tau)'$ et (c), il vient, en ne prenant que la partie écrite de ces expressions et en ayant égard à (b),

$$F_1(r) = \bar{\mathfrak{F}}_1(r) - \frac{\left(\frac{d\zeta'}{dt}\right)\zeta' + \left(\frac{d\zeta'}{dr}\right)\eta'}{\left(\frac{d^2\zeta'}{dt\,d\bar{\mathfrak{F}}_1}\right)\zeta' + \left(\frac{d^2\zeta'}{dr\,d\bar{\mathfrak{F}}_1}\right)\eta'} + \cdots$$

ou, d'après (b) et $(b)'$,

$$(d) \qquad F_1(r) = \bar{\mathfrak{F}}_1(r) - \frac{\left(\frac{d\Psi_1}{dt}\right)\Psi_1 - a^2\left(\frac{d\Psi_1}{dr}\right)\Psi_2}{\left(\frac{d^2\Psi_1}{dt\,d\bar{\mathfrak{F}}_1}\right)\Psi_1 - a^2\left(\frac{d^2\Psi_1}{dr\,d\bar{\mathfrak{F}}_1}\right)\Psi_2} + \cdots;$$

nous écrivons encore, pour simplifier, Ψ pour $\Psi(r)$.

Pour la seconde expression (a), faisons, d'après $(6)'$,

$$\chi(s) = b^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-1} + \eta + \tfrac{1}{2}\zeta^2,$$

nous aurons, comme pour $(\rho)'$,

$$(e) \qquad \left(\frac{d\eta'}{d\bar{\mathfrak{F}}_2}\right) = \left(\frac{ds'}{d\bar{\mathfrak{F}}_2}\right) - \chi(s')\frac{\left(\frac{d^2s'}{d\bar{\mathfrak{F}}_2^2}\right)}{\left(\frac{d\chi(s')}{d\bar{\mathfrak{F}}_2}\right)} + \cdots;$$

le second terme peut s'écrire

$$\chi(s')\frac{\left(\frac{d^2s'}{d\bar{\mathfrak{F}}_2^2}\right)}{\left[a^2(1+s)^{\frac{c}{c'}-2}\right]\left(\frac{ds'}{d\bar{\mathfrak{F}}_2}\right)};$$

par suite, substituant les premiers termes de (e) dans la seconde expression (a) et tenant compte de $(\tau)'$ et (b), il vient

$$(f) \qquad F_2(r) = \bar{\mathfrak{F}}_2(r) - \frac{\left(\frac{d\Psi_2}{d\bar{\mathfrak{F}}_2}\right)}{\left(\frac{d^2\Psi_2}{d\bar{\mathfrak{F}}_2^2}\right)} + \cdots.$$

Il reste encore à calculer les dérivées qui entrent dans les expressions (d) et (f); pour cela, on a généralement, pour le premier ordre de

dérivation,

$$\frac{d\Psi}{d\bar{\mathfrak{F}}} = \frac{d\Psi}{dr}\,\frac{1}{\dfrac{d\bar{\mathfrak{F}}}{dr}};$$

par suite, la dérivée de $\Psi_2(r)$, par exemple, $\Psi_2(r)$ étant donné par (φ), sera

$$\left(\frac{d\Psi_2(r)}{d\bar{\mathfrak{F}}_2(r)}\right) = -\frac{1}{r}\left(\frac{d^2\bar{\mathfrak{F}}_1}{dr^2}\,\frac{1}{\dfrac{d\bar{\mathfrak{F}}_2}{dr}} - \frac{d^2\bar{\mathfrak{F}}_2}{dr^2}\,\frac{1}{\dfrac{d\bar{\mathfrak{F}}_2}{dr}}\right);$$

$\bar{\mathfrak{F}}_1(r)$ est ici considéré comme fonction de $\bar{\mathfrak{F}}_2(r)$.

On opérerait d'une façon analogue pour la dérivée de Ψ_1 et les dérivées supérieures. Quant aux dérivées de Ψ_1 par rapport à t qui entrent dans (d), pour les obtenir, il suffira de supposer que dans la première expression $(\tau)''$ on ait mis $\bar{\mathfrak{F}}_1(r+at)$ au lieu de $\bar{\mathfrak{F}}_1(r)$ et $\bar{\mathfrak{F}}_2(r-at)$ au lieu de $\bar{\mathfrak{F}}_2(r)$, et de substituer ensuite les différentielles de r à celles de at, ainsi qu'on l'a fait pour passer de la seconde relation $(\tau)''$ à la relation (φ).

On calculera de cette manière toutes les dérivées qui entrent dans les expressions (d) et (f) donnant les fonctions arbitraires cherchées. On remarquera que ces fonctions se présentent sous forme de développements indéfinis, ce qui est dû à leur forme technique et aussi à ce qu'elles sont des fonctions essentiellement transcendantes.

On suivrait une marche tout à fait semblable à celle qui précède pour avoir la fonction $F_2(-z)$ et ses dérivées au moyen de $F_1(z)$ et des dérivées de cette dernière fonction.

Nous avons ainsi achevé la résolution des équations simultanées qui devait compléter l'intégration de l'équation proposée (θ), et les inconnues du problème V et γ sont maintenant déterminées avec toute l'exactitude qu'on peut désirer.

SEPTIÈME EXEMPLE. — *Calcul du profil d'égale résistance d'un mur de barrage.*

Conditions du problème. — Nous nous proposons de calculer le profil d'un mur de réservoir construit dans des conditions telles que les

pressions exercées sur les matériaux, dans les parties les plus fatiguées, soient égales ou inférieures à une pression donnée.

Nous n'envisagerons la question qu'au point de vue du calcul : elle a d'ailleurs été l'objet de Mémoires spéciaux. Nous nous bornerons donc à établir les équations du problème afin de les résoudre et de montrer par là que la méthode de Wronski, loin d'être illusoire, permet de surmonter de véritables difficultés.

La marche que nous allons suivre pour arriver aux équations à résoudre est analogue à celle qui est indiquée par M. Delocre dans son Mémoire *Sur la forme du profil à adopter pour les grands barrages en maçonnerie des réservoirs* [1]. Ce travail, justement apprécié, a été composé lors de l'étude du barrage du Furens au Gouffre d'Enfer, près de Saint-Étienne (barrage de Rochetaillée). Plus tard, en examinant les procédés d'exécution du second barrage du Furens, au Pas-du-Rio, nous avons eu l'idée d'appliquer les méthodes de Wronski au calcul du profil théorique des murs de cette espèce.

Pour l'objet que nous avons en vue, il suffira de considérer le cas d'un barrage droit, dans une large vallée, résistant par son seul poids à la poussée de l'eau; l'ouvrage se composera alors de trois parties.

Dans la partie supérieure OGIJ (*fig.* 1), le mur devant avoir une certaine épaisseur, il ne peut exister de profil théorique; le mur sera un mur ordinaire à parements verticaux. Le profil théorique ne commencera que lorsque, par suite de la poussée de l'eau, la partie la plus fatiguée de la maçonnerie subira la pression que l'on s'est assignée d'avance. La seconde partie du mur, IJKL, présente un parement vertical en amont et de l'autre côté un parement courbe jouissant de la propriété d'égale résistance; la pression la plus forte est en L lorsque le réservoir est plein, et, lorsqu'il est vide, cette pression se reportant en K ne doit pas excéder la pression maxima admise. Cette pression atteinte, les deux parements du mur s'infléchissent, et les deux profils sont déterminés par la condition que les pressions le long de la ligne LB soient constantes lorsque le réservoir est plein, et que les pressions le long de al ligne KA soient aussi constantes lorsque le réservoir est vide.

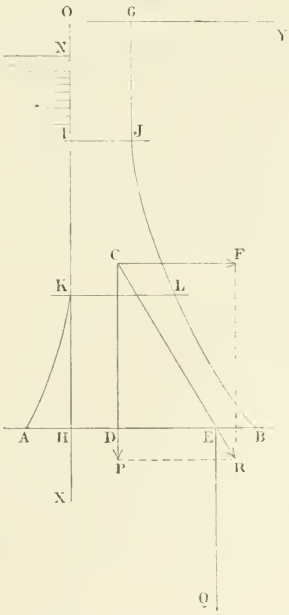
---

(1) *Annales des Ponts et Chaussées*, 4e série, t. XII (1866), n° 135, p. 212.

La délimitation de ces trois parties du mur offre un certain intérêt au point de vue du calcul.

Dans le calcul du profil, il faut tenir compte de la stabilité du mur et de la résistance des matériaux; la stabilité est définie par l'égalité des moments des forces pris par rapport à un axe, et la résistance comprend le glissement suivant une section déterminée et l'écrasement

Fig. 1.



dans cette section. Nous ne tiendrons pas compte du glissement, et même nous ne considérerons l'écrasement que dans les sections horizontales ou assises fictives, comme cela se pratique ordinairement.

Considérons une section du mur OGAB (*fig.* 1) dont la largeur soit de 1^m, N étant le niveau normal de l'eau du réservoir et AB le joint fictif considéré; nous prendrons pour axes de coordonnées l'horizon-

tale OY à la partie supérieure du mur, et la verticale OX formant une partie du profil d'amont.

Soit C le point d'application de la résultante CR des forces ; CF est la résultante des actions horizontales, la poussée de l'eau, et CP la résultante des actions verticales, le poids de la maçonnerie et la pression de l'eau sur la partie KA ; nous désignerons par x la hauteur du mur jusqu'au joint considéré, par y_1 l'ordonnée du profil d'aval et y_2 celle du profil d'amont, et par δ le poids du mètre cube de maçonnerie.

Stabilité. — La relation des moments pris par rapport à l'axe H, perpendiculaire au plan de la figure et situé sur OX dans le plan du joint AB, est

$$CP.HD + CF.CD = EQ.HE.$$

E est le point de rencontre de la résultante CR et du joint AB, et EQ est égal et parallèle à CP.

Le premier terme, CP.HD est dû au poids P_m de la maçonnerie et à la pression verticale de l'eau P_e en KA ; on a donc, en désignant par k et h leurs bras de levier,

$$CP.HD = P_m.k - P_e.h,$$

et ensuite

$$P_m = \delta \int_0^x y_1 dx - \delta \int_0^x y_2 dx,$$

ce qui donne

$$P_m.k = \delta \int_0^x (y_1 - y_2) dx \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\delta}{2} \int_0^x (y_1^2 - y_2^2) dx.$$

Pour la quantité P_e, δ' étant la densité de l'eau et a désignant ON, on a

$$P_e = -\delta' \int_a^x (x - a) dy_2;$$

les limites de l'intégrale pourraient être o et x, ce qui revient au même ; la somme des moments est ainsi

$$P_e.h = \delta' \int_a^x (x - a) dy_2 . y_2 = \delta' \int_a^x (x - a) y_2 dy_2.$$

Pour ce qui concerne le second terme, l'action horizontale est due seulement à l'eau; X étant l'abscisse courante, on a

$$\mathrm{CD} = \delta' \int_a^x (\mathrm{X} - a)\,d\mathrm{X},$$

et, pour le moment,

$$\mathrm{CF.CD} = \delta' \int_a^x (\mathrm{X} - a)\,d\mathrm{X}(x - \mathrm{X}) = \frac{\delta'}{6}(x - a)^3.$$

Enfin, pour le terme du second membre, la somme des actions verticales est $\mathrm{P}_m + \mathrm{P}_e$, et, en désignant EB par u_1, EH est $y_1 - u_1$; donc, en faisant

$$\theta = \frac{\delta'}{\delta},$$

on a

$$\frac{1}{2}\int_0^x y_1^2\,dx - \frac{1}{2}\int y_2^2\,dx - \theta\int_a^x (x - a)y_2\,dy_2 + \frac{\theta}{6}(x - a)^3$$
$$= \left[\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx - \theta\int_a^x (x - a)\,dy_2\right](y_1 - u_1),$$

d'où

$$(1)\qquad u_1 = y_1 - \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x y_1^2\,dx - \int_0^x y_2^2\,dx - 2\theta\int_a^x (x - a)y_2\,dy_2 + \frac{\theta}{3}(x - a)^3}{\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx - \theta\int_a^x (x - a)\,dy_2}.$$

Cette valeur du u_1 se rapporte au réservoir plein; dans le cas du réservoir vide, il faut supprimer les termes qui tiennent compte de la pression de l'eau; ce sont ceux qui contiennent la quantité θ en facteur: le point C est alors le centre de gravité du mur; en désignant par u_2 la valeur de AD, il vient

$$\frac{1}{2}\int_0^x y_1^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^x y^2\,dx = \left(\int_0^x y_1\,dx - \int_0^x y_2\,dx\right)(y_2 + u_2),$$

d'où

$$(2)\qquad u_2 = -y_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x y_1^2\,dx - \int_0^x y_2^2\,dx}{\int_0^x y\,dx - \int_0^x y_2\,dx}.$$

Les expressions (1) et (2) donnent les deux conditions de stabilité, pourvu que le point E se trouve dans l'intérieur du joint.

Résistance. — Aux conditions précédentes il faut joindre celles qui se rapportent à la conservation des matériaux employés en limitant la pression qu'ils ont à subir. A cet effet, il faut chercher le mode de répartition des pressions sur l'étendue du joint considéré; le principe fondamental dont on fait usage est connu sous le nom de *loi du trapèze.* On admet que les composantes des pressions normales au joint varient suivant une fonction linéaire, de telle sorte que, si ces composantes sont représentées en grandeur et en direction par des lignes droites partant du joint, elles formeront un trapèze par leur ensemble. Il s'ensuit que la résultante des pressions normales au joint passe par le centre de gravité du trapèze.

Dans les constructions en maçonnerie, on néglige les pressions négatives ou tractions; quand elles existent, les deux côtés non parallèles du trapèze se coupent dans l'intérieur du joint, et le trapèze se compose, en réalité, de deux triangles. D'après ce qui vient d'être dit, on néglige le triangle qui correspond aux efforts de traction, et la loi du trapèze dégénère en *loi du triangle.*

Les forces étant réparties sur le joint suivant ces conditions, la plus grande pression a lieu à l'extrémité du joint le plus rapproché du centre de gravité du *trapèze* ou du *triangle.* Si u est la distance de la pression résultante à l'extrémité la plus fatiguée du joint et l la longueur du joint, la loi du trapèze sera applicable quand on aura $u > \frac{l}{3}$; la loi du triangle le sera dans le cas contraire où $u < \frac{l}{3}$.

Cela posé, si l'on désigne par p la pression par mètre superficiel au point le plus fatigué, et P la résultante des forces normales au joint, on trouve les formules suivantes, qui sont bien connues : dans le cas du trapèze,

$$u > \frac{l}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad p = 2\left(2 - \frac{3u}{l}\right)\frac{P}{l};$$

et dans le cas du triangle,

$$u < \frac{l}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad p = \frac{2}{3}\frac{P}{u}.$$

On peut, à la place de p, introduire la hauteur λ d'un mur à faces verticales dont la pression sur sa base serait p pour 1^{m} superficiel; cette pression est alors exprimée par $\delta\lambda$. D'après cela, on a, dans le premier cas,

$$u = \frac{2}{3} l - \frac{\delta\lambda}{6} \frac{l^2}{P},$$

et, dans le second cas,

$$u = \frac{2}{3} \frac{P}{\delta\lambda}.$$

Remplaçant maintenant l par sa valeur $y_1 - y_2$ et P par $P_m + P_e$, ou P_m, on aura, dans le cas du réservoir plein,

$$(3) \qquad u_1 = \frac{2}{3}(y_1 - y_2) - \frac{\lambda}{6} \frac{(y_1 - y_2)^2}{\int_0^x y_1 dx - \int_0^x y_2 dx - \theta \int_a^x (x - a) dy_2},$$

ou

$$(4) \qquad u_1 = \frac{2}{3} \frac{\int_0^x y_1 dx - \int_0^x y_2 dx - \theta \int_a^x (x - a) dy_2}{\lambda},$$

et, dans le cas du réservoir vide,

$$(5) \qquad u_2 = \frac{2}{3}(y_1 - y_2) - \frac{\lambda}{6} \frac{(y_1 - y_2)^2}{\int_0^x y_1 dx - \int_0^x y_2 dx},$$

ou

$$(6) \qquad u_2 = \frac{2}{3} \frac{\int_0^x y_1 dx - \int_0^x y_2 dx}{\lambda};$$

telles sont les deux doubles conditions de résistance.

Équations du problème. — Les équations du problème s'obtiendraient immédiatement en éliminant u_1 et u_2 entre les équations (1) et (3) ou (4), et entre les équations (2) et (5) ou (6); mais il est inutile de les écrire de suite. Nous allons changer de notations: pour simplifier

l'écriture, nous ferons

$$z_1 = \int_0^x y_1 dx, \quad z_2 = \int_0^x y_2 dx,$$

puis

$$y_1 = z_1', \quad y_2 = z_2', \quad dy_1 = z_1'' dx, \quad dy_2 = z_2'' dx, \quad \ldots$$

et les expressions précédentes deviennent respectivement

$$(7) \quad u_1 = z_1' - \frac{1}{2} \frac{\int_0^x z_1'^2 dx - \int_0^x z_2'^2 dx - 2\theta \int_0^x (x-a) z_2' z_2'' dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z_1 - z_2 - \theta \int_0^x (x-a) z_2'' dx},$$

$$(8) \quad u_2 = -z_2' + \frac{1}{2} \frac{\int_0^x z_1'^2 dx - \int_0^x z_2'^2 dx}{z_1 - z_2},$$

$$(9) \quad u_1 = \frac{2}{3}(z_1' - z_2') - \frac{\lambda}{6} \frac{(z_1' - z_2')^2}{z_1 - z_2 - \theta \int_0^x (x-a) z_2'' dx},$$

$$(10) \quad u_1 = \frac{2}{3\lambda}\left[z_1 - z_2 - \theta \int_0^x (x-a) z_2'' dx\right],$$

$$(11) \quad u_2 = \frac{2}{3}(z_1' - z_2') - \frac{\lambda}{6} \frac{(z_1' - z_2')^2}{z_1 - z_2},$$

$$(12) \quad u_2 = \frac{2}{3\lambda}(z_1 - z_2).$$

Nous ferons usage de ces expressions avec les intégrales définies qu'elles contiennent. Dans l'application numérique, nous supposerons que la largeur b du mur au sommet est de 5^m, que le niveau de l'eau se maintient à une distance a de 5^m en dessous du sommet du mur, et que la pression que doivent supporter les matériaux ne dépasse pas 6^{kg} par centimètre carré, de sorte que, si la densité δ de la maçonnerie est 2, la hauteur λ est 30^m.

Avec ces données, nous allons effectuer le calcul du mur successivement pour ses trois parties principales.

Première partie. — Nous avons vu que, dans la partie supérieure du

mur, il ne pouvait y avoir de profil d'égale résistance : ce que l'on doit se proposer de connaître est la hauteur à partir de laquelle commence le profil théorique, c'est-à-dire la position du point J pour lequel la pression est $\delta\lambda$.

Dans cette partie du mur, on a

$$z_1' = b \quad \text{et} \quad z_2 = 0;$$

de plus, les expressions qu'il faut employer sont (7) et (9) ou (7) et (10), suivant qu'il faut faire usage de la loi du trapèze ou de la loi du triangle. Dans la partie supérieure du mur, on doit évidemment appliquer la première loi, et la seconde n'est utile que pour des hauteurs un peu considérables. Le choix entre (9) et (10) peut être fait de la manière suivante : donnant a u_1 la valeur $\frac{b}{3}$ dans (7), cette expression se réduit à

$$6(x-a)^3 - b^2x = 0,$$

ou, si l'on fait $x - a = X$, il vient

$$6X^3 - b^2X - b^2a = 0.$$

En mettant pour a, b, δ leurs valeurs, on obtient l'équation du troisième degré

$$X^3 - 50X - 250 = 0,$$

dont il suffit d'évaluer l'unique racine positive.

L'expression fondamentale donne, pour cela,

$$X = w - \frac{\varphi(w)}{\frac{d\varphi(w)}{dw}} + \cdots$$

Ces deux premiers termes suffisent; on a donc

$$\varphi(X) = X^3 - 50X - 250,$$

$$\frac{d\varphi(X)}{dX} = 3X^2 - 50.$$

Or la racine cherchée est comprise entre 8 et 9, et est plus rapprochée

de 9; faisant ainsi

$$w = 9,$$

on a

$$\varphi(w) = +29,$$

$$\frac{d\varphi(w)}{dw} = +193,$$

dont le rapport est 0,150, par suite

$$X = 9 - 0,15 = 8,85$$

et

$$x = 5 + 8,85 = 13,85.$$

Portant cette valeur dans (10), cette expression devient

$$\frac{1}{3} b = \frac{2}{3\lambda} bx;$$

on en déduit

$$\lambda = 2x = 27,70.$$

Ainsi, pour la valeur de u_1 égale à $\frac{1}{3} b$, la pression, au point le plus fatigué du joint qui est à $13^m,85$ du sommet, est égale à la pression qui se produit sur la base d'un mur droit de $27^m,70$ de hauteur; cette pression étant inférieure à la limite que l'on s'est fixée, 30^m, il en résulte que la hauteur de la première partie du mur est donnée par les expressions (7) et (10). Ces expressions deviennent, en mettant pour z et z'_1 leurs valeurs bx et b,

$$u_1 = b - \frac{1}{2} \frac{b^2 x + \frac{9}{3}(x-a)^3}{bx},$$

$$u_1 = \frac{2}{3\lambda} bx.$$

En éliminant u_1, il vient

$$(13) \qquad \frac{1}{2} b - \frac{2}{3\lambda} bx - \frac{9}{6bx}(x-a)^3 = 0$$

ou, en faisant $X = x - a$,

$$(13)' \quad 9X^3 + \frac{4b^2}{\lambda} X^2 - 3b^2\left(1 - \frac{8a}{3\lambda}\right) X - 3b^2 a\left(1 - \frac{4a}{3\lambda}\right) = 0.$$

Si l'on remplace les coefficients par leurs valeurs, l'équation à résoudre est alors

$$(13'') \qquad X^3 + X^2 \tfrac{2}{3} 10 - X \tfrac{2}{3} 125 - \tfrac{2}{3} 875 = 0;$$

de même que l'équation précédente, celle-ci a une racine positive et deux racines imaginaires.

Pour simplifier l'écriture, nous ferons usage de la notation des dérivées, ce qui n'aura aucun inconvénient maintenant que l'on connaît la signification des formules précédentes. Le second *progrès de la génération neutre* donne pour l'expression fondamentale

$$X = w - \frac{1}{\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} - \frac{1}{2}\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}};$$

et l'on a

$$\varphi(X) = X^3 + X^2 \frac{20}{3} - X \frac{250}{3} - \frac{1750}{3},$$

$$\varphi'(X) = 3X^2 + X \frac{40}{3} - \frac{250}{3},$$

$$\varphi''(X) = 6X + \frac{40}{3}.$$

La racine positive est comprise entre 9 et 10; faisant donc $w = 9$, on a

$$\varphi(w) = -\ 64,333,$$
$$\varphi'(w) = +\ 279,666,$$
$$\varphi''(w) = +\ 67,333;$$

d'où

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} = -4,3471, \quad \frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = +0,2413;$$

la racine est ainsi

$$X = 9 + \frac{1}{4,4077} = 9,2238.$$

Cette valeur est exacte à moins d'un millimètre; on en déduit la

hauteur cherchée en ajoutant 5^{m},

$$(14) \qquad x = 14^{m},2238;$$

puis le cube de maçonnerie est

$$(14)' \qquad z = 71^{mc},1191,$$

enfin la valeur de u_1, d'après (7), est

$$u_1 = 1^{m},5804,$$

valeur inférieure au tiers de la longueur du joint $1^{m},666$; comme vérification, on trouve, pour λ, d'après (10), $\lambda = 30,000$.

Seconde partie. — Le calcul de la seconde partie du mur consiste à calculer le profil théorique de la partie JL et à en déterminer la limite L.

Nous avons encore pour toute cette portion du mur

$$z_2 = 0, \quad z'_2 = 0, \quad z''_2 = 0, \ \ldots;$$

en supprimant l'indice des fonctions z_1; et faisant

$$(15)_1 \qquad h = \frac{2}{3\lambda} = \frac{1}{45} \quad \text{ou} \quad 0,02222,$$

les expressions (7) et (10) donneront

$$(15) \qquad \begin{cases} u_1 = z' - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx + \dfrac{0}{3}(x-a)^3}{z}, \\ u_1 = hz; \end{cases}$$

le choix de ces expressions est indiqué d'après ce qui précède. En éliminant u_1, il vient

$$(16) \qquad z' - hz - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^x z'^2\,dx + \frac{0}{3}(x-a)^3}{z} = 0,$$

équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer.

Cette équation ne diffère pas de l'équation (12) du Mémoire de M. Delocre; cet ingénieur ajoute (p. 225) :

Nous avons cherché à intégrer les formules (11) [1] et (12), mais nous n'avons pu y parvenir par une méthode exacte : il nous a seulement été possible d'obtenir y développé en série en fonction de x; la série qui convient à l'équation (11) est de la forme

$$y = ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{5}{2}} + cx^{\frac{7}{2}} + \ldots;$$

celle qui convient à l'équation (12) est de la forme

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots.$$

Nous avions calculé les coefficients des premiers termes en admettant pour θ et λ les valeurs

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 30.$$

Mais il nous a paru inutile de reproduire ici ces calculs; les formules ci-dessus ne peuvent, en effet, être d'aucune utilité pour arriver à déterminer un profil pratique; elles ne conviennent qu'à la portion CN (*lisez* JL) de la courbe intérieure de la *fig.* 8 (*lisez fig.* 1) et les calculs auxquels on serait conduit pour déterminer les deux courbes NPB, MLS (*lisez* KA, LB) de la partie inférieure du profil sont tout à fait impraticables, même en ayant recours aux méthodes approchées.

Nous citons ce passage pour bien préciser l'insuffisance des méthodes dont on dispose, en dehors de celles que nous faisons connaître; après l'examen des calculs que nous présentons, on pourra constater un progrès réel dû aux travaux de Wronski, travaux trop longtemps méconnus.

La forme sous laquelle se présente l'équation (16) indique que, si l'on connaissait une valeur approchée de la fonction z, le troisième terme pourrait être considéré comme une fonction de x, et l'équation formée ainsi serait une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants; intégrée, elle donnerait une valeur très approchée de la fonction inconnue. Prenant donc pour *équation réduite* une équation différentielle formée de cette manière, la méthode de Wronski ferait

---

[1] L'équation (11) est celle qui résulte de l'élimination des relations (1) et (5) ou (7) et (9).

connaître la fonction cherchée avec une approximation bien supérieure à celle que l'on désire.

Cette formation de l'équation réduite est possible de bien des manières; mais, pour que les calculs soient praticables, il faut que les intégrales définies que l'on rencontre puissent s'obtenir par des calculs directs ou par quadratures. Nous avons procédé ainsi et nous sommes parvenu à calculer directement l'ordonnée du profil correspondant à $x = 2.4$. Quoi que l'on fasse, ces calculs sont longs; il est préférable d'opérer comme l'indique Wronski et d'obtenir l'équation réduite de la manière suivante.

Si, dans le troisième terme de l'équation (16), nous remplaçons z et z' par leurs valeurs moyennes que nous prendrons ici égales aux valeurs initiales 71,119 et 14,224, nous aurons pour ce terme une quantité de la forme

$$Ax + B(x-a)^3;$$

il sera facile alors de calculer l'intégrale définie

$$\int_0^x [Ax + B(x-a)^3] e^{-hx} dx.$$

Mais l'expression de cette intégrale présente une partie des inconvénients que nous venons de signaler; on peut les éviter par l'introduction de la fonction arbitraire se^{rx}. Si l'on se rend compte de la variation du troisième terme de (16) pour des valeurs croissantes de x, ce qu'il est facile de faire *a priori*, on verra que cette fonction est ici très avantageuse.

Nous pourrons donc écrire l'équation transformée sous la forme

$$(17) \qquad z' - hz - \left[\frac{\frac{1}{2}\int_0^x z'^2 dx + \frac{0}{3}(x-a)^3}{zse^{rx}} \right]^{\omega} se^{rx} = 0;$$

pour $\omega = 1$ on a l'équation proposée (16), et pour $\omega = 0$ on a l'équation réduite

$$(18) \qquad w' - hw - se^{rx} = 0,$$

en mettant w à la place de z.

Les valeurs fondamentales de la fonction cherchée, c'est-à-dire la fonction w et ses dérivées, sont

$$(19)\quad \begin{cases} w = M\quad e^{hx} + N\quad e^{rx}, \\ w' = Mh\ e^{hx} + Nr\ e^{rx}, \\ w'' = Mh^2 e^{hx} + Nr^2 e^{rx}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

M, N et r étant des constantes arbitraires qu'il faut déterminer d'après les valeurs initiales de l'équation (16); ces dernières sont aussi les valeurs moyennes. Nous avons, pour valeurs initiales,

$$(20)\quad \begin{cases} x = 14,224, \quad z = 71,119, \quad z' = 5, \\ \int_0^x z'^2 dx = b^2 x = 142,238, \end{cases}$$

et l'équation (16) donne par dérivation

$$(20)'\qquad z'' = 0,34554;$$

c'est la tangente au point de départ du nouveau profil.

Il faut remarquer que l'équation (16), pour $x = 14,224$, est identique à l'équation (13).

Les constantes sont ainsi données par la résolution des équations

$$\begin{aligned} 71,119 &= M\quad e^{h\,14,224} - \quad N e^{r\,14,224}, \\ 5 &= Mh\ e^{h\,14,224} + r\,N e^{r\,14,224}, \\ 0,3455 &= Mh^2 e^{h\,14,224} + r^2 N e^{r\,14,224}; \end{aligned}$$

on en déduit

$$(21)\quad \begin{cases} r = \dfrac{5h - 0,3455}{71,119h - 5} = 0,0685548, \\ M = \dfrac{r.71,119 - 5}{r - h}\, e^{-h\,14,224} = -1,9581, \\ N = \dfrac{0,3455 - h.5}{r(r - h)}\, e^{-r\,14,224} = +27,8358. \end{cases}$$

On a ainsi, pour l'intégrale définie qu'il faut calculer,

$$\int_0^{\infty} w'^2\,dx = \int_0^{\infty} \left(M^2 h^2 e^{2hx} + 2MNhre^{(h+r)x} + N^2 r^2 e^{2rx}\right) dx,$$

et, déterminant la constante comme plus haut,

$$(22)\qquad \int_0^{\infty} w'^2\,dx = \frac{1}{2} M^2 h e^{2hx} + \frac{2MNhr}{h+r} e^{(h+r)x} + \frac{1}{2} N^2 r e^{2rx} + 175,710.$$

Il est maintenant facile d'obtenir l'expression des fonctions inconnues. En effet, le deuxième progrès de la génération neutre donne, pour l'expression fondamentale,

$$(23)\qquad F(z) = F(w) - \frac{\left(\dfrac{\varphi'(w)}{\varphi(w)}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{F''(w)}{F'(w)}\right) + \left(\dfrac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}\right)}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{F''(w)}{F'(w)}\right) - \left(\dfrac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}\right)}.$$

$F(z)$ est une fonction quelconque de z; quant aux fonctions φ, elles sont

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}
\varphi(z) &= z' - hz - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^{x} z^2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z},\\
\varphi'(z) &= z'' - hz' - \frac{z}{z}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^{x} z'^2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z} - \frac{1}{2}z'\right],\\
\varphi''(z) &= z''' - hz'' - \frac{z}{z}\left[z'' - \frac{z'^2}{z} - \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^{x} z^2\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z} - \left(2\frac{z'}{z} - \frac{z''}{z'}\right)\right]:
\end{aligned}\right.$$

à la place de z, substituant w calculé au moyen de (19), ainsi que ses dérivées, on obtiendra la fonction $F(z)$. Mais, si l'on observe que les dérivées w'', w''' calculées par (19) peuvent différer notablement des valeurs véritables z'', z''', celles de w, w' étant au contraire suffisamment approchées, il sera avantageux d'opérer de la manière suivante, que nous avons déjà indiquée.

En prenant les dérivées totales, on a les relations,

$$(25)\quad \begin{cases} \varphi(z) = 0, \\ \varphi'(z) = (\varphi'(z)) - \frac{1}{2}\frac{\theta(x-a)^2}{z} = 0, \\ \varphi''(z) = (\varphi''(z)) - \frac{\theta(x-a)}{z}\left[1 - \frac{w'(x-\alpha)}{w}\right] = 0: \end{cases}$$

on peut donc substituer aux dérivées partielles $(\varphi'(z))$, $(\varphi''(z))$ le complément des dérivées totales, pourvu toutefois que w et w' soient assez rapprochés de z et z'; les autres dérivées w'', w''' seront alors calculées au moyen des dérivées totales de l'équation proposée.

En opérant ainsi, on a, pour $x = 17$,

$$(26)\quad \begin{cases} w = 86,421, \quad w' = 6,057, \quad w'^2 = 36,686, \\ w'' = 0,4675, \quad w''' = 0,1452, \quad \int_0^x w'^2\,dx = 141,932, \end{cases}$$

et l'équation réduite donnerait

$$w'' = 0,41817, \quad w''' = 0,02887.$$

On a encore

$$(27)\quad \begin{cases} \varphi(w) = -0,086, \quad (\varphi'(w)) = +0,4166, \quad (\varphi''(w)) = +0,1132, \\ \frac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} = -4,844, \quad \frac{(\varphi''(w))}{(\varphi'(w))} = +0,308. \end{cases}$$

L'expression qui donne z est, d'après (23), en faisant $F(z) = z$

$$(28)\quad z = w - \frac{w'}{\frac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} + \frac{1}{2}\left(\frac{w''}{w'} - \frac{(\varphi''(w))}{(\varphi'(w))}\right)};$$

les autres dérivées s'obtiendraient en faisant successivement $F(z) = z'$, z'', ... Si l'on fait $F(z) = \int z'^2\,dx$, on a

$$(28')\quad \int_0^x z'^2\,dx = \int_0^x w'^2\,dx - \frac{w'^2}{\frac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} + \frac{1}{2}\left(\frac{2w''}{w'} - \frac{(\varphi''(w))}{(\varphi'(w))}\right)}.$$

Substituant les nombres aux quantités qui entrent dans ces formules,

on obtient définitivement, pour $x = 17$,

$$(29)\quad \begin{cases} z = 86,421 + 1,221 = 87,642, \\ z' = 6,057 + 0,096 = 6,153, \\ z'' = 0,4682, \\ \int_0^x z'^2 dx = 441,93 + 7,45 = 449,38. \end{cases}$$

La dérivée z'' a été calculée au moyen de la dérivée totale de l'équation proposée et des quantités z et z'; calculée comme z', elle serait $z'' = 0,4975$, et au moyen des valeurs tirées de l'équation réduite, elle serait $z'' = 0,4212$, ce qui fait voir que le deuxième progrès (23) est insuffisant, ou que la convergence de l'expression fondamentale pour z'' est moins grande que pour z et z'.

Comme vérification, on a

$$\varphi(z) = +0,003;$$

les valeurs (29) sont donc suffisamment exactes, mais, pour des valeurs de x supérieures à 17, il ne serait pas prudent d'effectuer les calculs avec les constantes données par (21) et (22) : il faut prendre les quantités (29) comme valeurs initiales et calculer de nouvelles constantes par le même procédé que plus haut.

Il est nécessaire de vérifier si l'équation proposée (16), provenant de l'élimination de u_1 entre les relations (15) ou (7) et (10), convient encore; pour cela, la première équation (15) donne

$$(30)\qquad u_1 = 1,931,$$

quantité plus petite que $\frac{1}{3}z' = 2,045$, ce qui correspond à la supposition faite. Il convient aussi de calculer u_2 et la valeur correspondante de λ; la relation (8) donne

$$(30')\qquad u_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\int_0^x z'^2 dx}{z} = 2,547,$$

et l'on tire de (11)

$$(30'')\qquad \lambda = \left(\frac{2}{3}z' - u_2\right)\frac{6z}{z'^2} = 21,37.$$

On voit qu'il faut poursuivre le calcul : on prendra donc les valeurs (29) correspondant à $x = 17$ comme valeurs initiales et, changeant les constantes arbitraires au moyen des formules données plus haut, on calculera les valeurs des inconnues correspondant à $x = 20$; changeant encore une fois de constantes en prenant pour valeurs initiales les dernières valeurs calculées, on obtient les valeurs suivantes correspondant à $x = 24$:

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} z &= 141,93,\\ z' &= 10,356,\\ z'' &= 0,7183,\\ \int_0^x z^2\,dx &= 901,20. \end{aligned}\right.$$

On a aussi

$$(31')\qquad u_1 = 3,154,\quad u_2 = 3,174,$$

et la valeur de λ correspondant à u_2 est

$$(31'')\qquad \lambda = 29,807.$$

Ce nombre est assez rapproché de la limite $\lambda = 30$; le problème qui se présente maintenant consiste à déterminer la valeur de x correspondant à cette limite.

u_2 étant plus petit que $\frac{z'}{3}$, il faudra satisfaire en même temps aux relations (8) et (12) au moyen des fonctions z_1, z'_1, les fonctions z_2, z_2 étant toujours nulles; en éliminant u_2 entre les relations (8) et (12), supprimant l'indice de z et faisant $\frac{2}{3\lambda} = \frac{2}{90}$, on a

$$(32)\qquad hz - \frac{1}{2}\frac{\int_0^x z^2}{z} = 0,$$

équation transcendante en x, qu'il faut résoudre par rapport à cette quantité, puisque z est une fonction de x.

Faisons usage de l'expression fondamentale (23); elle se réduit à

$$(33)\qquad x = w - \frac{1}{\dfrac{\varphi(w)}{\varphi(w)} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi'(w)}{\varphi(w)}},$$

en posant $F(z) = x$, et nous aurons, d'après (32), après avoir chassé le dénominateur,

$$(34)\qquad \begin{cases} \varphi(x) = \int_0^x z'^2 dx - 2hz^2, \\ \varphi'(x) = z'^2 - 4hzz', \\ \varphi''(x) = 2z'z'' - 4hzz'' - 4hz'^2. \end{cases}$$

Prenons aussi, pour valeur fondamentale de x, $w = 24$; il vient

$$(35)\qquad \begin{cases} \varphi(w) = +5,78, \quad \varphi'(w) = -23,57, \quad \varphi''(w) = -13,71; \\ \dfrac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} = -4,079, \quad \dfrac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = -0,583. \end{cases}$$

Nous aurons donc, d'après (33), pour la solution de l'équation transcendante (32),

$$(36)\qquad x = 24,229.$$

Il reste à calculer de nouveau la quantité z et les fonctions de z correspondant à $x = 24,229$; on trouverait facilement

$$(36')\qquad z = 144,31, \quad z' = 10,520, \quad \int z'^2 dx = 925,76.$$

Comme vérification, (7) et (10) donnent

$$u_1 = 3,2066, \quad \lambda = 30,002;$$

puis (8) et (12),

$$u_2 = 3,2075, \quad \lambda = 29,995.$$

Les résultats obtenus présentent une exactitude suffisante pour passer à la détermination des profils de la troisième partie du mur.

Troisième partie. — D'après les conditions que nous nous sommes imposées, il existe deux profils courbes dans la partie inférieure du mur: le profil d'aval sera toujours déterminé par le système des rela-

tions (7) et (10), et le profil d'amont sera déterminé par le système (8) et (12).

Éliminant u_1 et u_2 dans chaque système, on obtient

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} z_1'' - hz_1 - h\left[z_2 + \theta\int_0^x (x-a)z_2''dx\right] \\ \qquad \frac{1}{2}\int_0^x z_1'^2 dx - \int_0^x z_2^2 dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z_2' z_2 dx - \frac{\theta}{3}(x-a) \\ \qquad\qquad z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2' dx \end{array}\right. = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{l} z_2'' - hz_2 - hz_1 - \frac{1}{2}\int_0^x z_1'^2 dx - \int_0^x z_2'^2 dx \\ \qquad\qquad z_1 - z_2 \end{array}\right. = 0,$$

équations différentielles simultanées qu'il s'agit d'intégrer; nous les représenterons respectivement par

$$\varphi_1(z_1, z_2) = 0, \quad \varphi_2(z_1, z_2) = 0,$$

ou, plus simplement, par

$$\varphi_1(z_1) = 0, \quad \varphi_2(z_2) = 0,$$

puisque z_2 est considéré comme fonction de z_1 dans φ_1, et z_1 comme fonction de z_2 dans φ_2.

Pour effectuer ce calcul, nous adopterons une marche en tout semblable à celle que nous avons suivie dans l'intégration précédente : nous mettrons les équations réduites sous la forme (18); les valeurs fondamentales seront alors de la forme (19); et celles-ci entreront dans l'expression fondamentale (23), qui donne les fonctions cherchées.

Mais, en examinant la composition des coefficients de la seconde équation (37), on voit qu'ils ne contiennent que des fonctions de z_1 et de z_2, ce qui fait que les dérivées partielles, par rapport à z_1 et z_2, du premier membre de cette équation, seront identiques aux dérivées totales de même ordre, et ces dérivées sont nulles. Il en résulterait une indétermination qui rendrait illusoire l'expression fondamentale (23), si l'on n'opérait de la manière suivante : d'après l'origine des équations (37), il est indiqué que la première doit déterminer la fonction z_1, et la seconde la fonction z_2; or la première équation, ne présentant an-

cune particularité, permettra de calculer directement la fonction z_1; cette fonction, une fois connue, pourra être considérée dans la seconde équation comme une simple fonction de x; de cette manière on aura

$$
\left\{
\begin{aligned}
\varphi(z_1) &= z_1' - h\left[z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2'\,dx\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z_2'z_2''\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2''\,dx}, \\
\varphi(z_1') &= z_1'' - h\left[z_1' - z_2' - \theta(x-a)z_2''\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\,\frac{z_1'^2 - z_2'^2 - 2\theta(x-a)z_2'z_2''}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2''\,dx} + \frac{z_1' - z_2' - \theta(x-a)z_2''}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2''\,dx} \\
&\quad \times \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z_2'z_2''\,dx - \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2''\,dx}, \\
\varphi(z_1'') &= z_1''' - h\left(z_1'' - z_2'' - \theta(x-a)z_2'''\right) \\
&\quad - \frac{z_1'z_1'' - z_2'z_2'' - \theta(x-a)(z_2''^2 - z_2'z_2''')}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2''\,dx} + \frac{z_1' - z_2' - \theta(x-a)z_2''}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2''\,dx} \\
&\quad \times \frac{z_1'^2 - z_2'^2 - 2\theta(x-a)z_2'z_2''}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2''\,dx} + \frac{z_1'' - z_2'' - \theta(x-a)z_2'''}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2''\,dx} \\
&\quad \times \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z_2'z_2''\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2''\,dx} \\
&\quad - 2\left[\frac{z_1' - z_2' - \theta(x-a)z_2''}{z_1 - z_2 - \int_0^x (x-a)z_2''\,dx}\right]^2 \\
&\quad \times \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a)z_2'z_2''\,dx - \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a)z_2''\,dx};
\end{aligned}
\right.
\tag{38}
$$

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned}
&\varphi_2(z_2) = z_2' + h(z_1 - z_2) - \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2},\\
&(\varphi_2'(z_2)) = z_2'' - h z_2' + \frac{1}{2}\,\frac{z_2'^2}{z_1 - z_2} - \frac{z_2'}{z_1 - z_2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2}.\\
&(\varphi_2''(z_2)) = z_2''' - h z_2'' + \frac{z_2' - z_2''}{z_1 - z_2} + \frac{z_2'}{2}\,\frac{2 z_2'^2 - z_1' z_2' - z_1'^2}{(z_1 - z_2)^2} - \frac{z_2''}{z_1 - z_2}\\
&\qquad \times \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2} + 2\,\frac{z_2'(z_1' - z_2')}{(z_1 - z_2)^2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2}.
\end{aligned}\right.$$

et les dérivées totales seront

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned}
&\varphi_1'(z_1) = (\varphi_1'(z_1)) - \frac{1}{2}\,\frac{\theta(x-a)^2}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a) z_2''\,dx} = 0,\\
&\varphi_1''(z_1) = (\varphi_1''(z_1)) + h\theta z_2''\\
&\qquad + \frac{\theta(a - x + z_2' z_2'')}{z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a) z_2''\,dx} + \frac{1}{2}\theta(x-a)^2\,\frac{z_1' - z_2' - \theta(x-a) z_2''}{\left[z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a) z_2''\,dx\right]^2}\\
&\qquad - \frac{1}{2}\theta z_2''\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx - 2\theta\int_0^x (x-a) z_2' z_2''\,dx + \frac{\theta}{3}(x-a)^3}{\left[z_1 - z_2 - \theta\int_0^x (x-a) z_2''\,dx\right]^2} = 0.
\end{aligned}\right.$$

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned}
&\varphi_2'(z_2) = (\varphi_2'(z_2)) + h z_1' - \frac{1}{2}\,\frac{z_1'^2}{z_1 - z_2} + \frac{z_1'}{z_1 - z_2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2} = 0.\\
&\varphi_2''(z_2) = (\varphi_2''(z_2)) + h z_1'' - \frac{z_1' z_1''}{z_1 - z_2}\\
&\qquad + \frac{z_1'}{2}\,\frac{2 z_1'^2 - z_1' z_2' - z_2'^2}{(z_1 - z_2)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{z_1'}{z_1 - z_2}\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2}\\
&\qquad - 2 z_1'\,\frac{z_1' - z_2'}{(z_1 - z_2)^2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^x z_1'^2\,dx - \int_0^x z_2'^2\,dx}{z_1 - z_2} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Ces relations nous permettent de déterminer les valeurs initiales.

La seconde équation (37) est identiquement satisfaite pour $x = 24,229$, puisque les quantités z_2, z'_2 et $\int_0^x z_2'^2 dx$ sont nulles, et la dérivée totale, première équation (41), donne z''_2. La première équation (37) est ainsi satisfaite pour les valeurs précédentes, en faisant de plus

$$\int_0^x (x - a) z_2 dx = 0, \quad \int_0^x (x - a) z'_2 z''_2 dx = 0,$$

ce qui est conforme aux conditions du problème. La dérivée totale, première relation (40), donnera z''_1, valeur qui diffère de la quantité $z'' = 0,7246$ du profil précédent à cause des nouvelles quantités qui entrent dans l'expression de z_2.

On a ainsi, à l'origine, pour $x = 24,229$,

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{lll} z_1 = 144,31, & z'_1 = 10,520, & z''_1 = 0,7176, \quad \int_0^x z_1'^2 dx = 925,76, \\ z_2 = 0, & z'_2 = 0, & z''_2 = -0,0841, \quad \int_0^x z_2'^2 dx = 0, \\ \int_0^x (x - a) z_2 dx = 0, & \int_0^x (x - a) z'_1 z_2 dx = 0. & \end{array} \right.$$

Maintenant, si l'on veut prendre pour valeurs fondamentales des quantités de la forme (19), on observera, d'après (21), que l'on aurait une quantité infinie pour r_2 correspondant à z_2; les expressions (19) ne peuvent donc convenir. Le moyen le plus simple de lever cette difficulté est de mettre ici l'équation réduite sous la forme

$$(43) \qquad w' - hw - px - q = 0,$$

qui est suffisante; nous l'adopterons pour les deux profils [1].

[1] On aurait pu aussi, dans (18), substituer avec avantage à la fonction se^{px} la fonction plus simple $px + q$.

Nous aurons donc ainsi

$$(44)\quad \begin{cases} w_1 = M_1 e^{hx} + P_1 x + Q_1, \\ w'_1 = M_1 h e^{hx} + P_1, \\ w''_1 = M_1 h^2 e^{hx}; \end{cases}$$

$$(44)'\quad \begin{cases} w_2 = M_2 e^{hx} + P_2 x + Q_2, \\ w'_2 = M_2 h e^{hx} + P_2, \\ w''_2 = M_2 h^2 e^{hx}; \end{cases}$$

et les constantes seront

$$(45)\quad \begin{cases} M_1 = \frac{0,7476}{h^2} e^{-h.24,229} = +883,612, \\ P_1 = 10,520 - M_1 h e^{h.24,229} = -23,122, \\ Q_1 = 144,31 - M_1 h^2 e^{h.24,229} - P.24,229 = -809,36; \end{cases}$$

$$(45)'\quad \begin{cases} M_2 = -\frac{0,0841}{h^2} e^{-h.24,229} = -99,471, \\ P_2 = -M_2 h e^{h.24,229} = +3,787, \\ Q_2 = -M_2 h^2 e^{h.24,229} - P.24,229 = +78,664. \end{cases}$$

On a ensuite, pour les intégrales définies,

$$(46)\quad \int_0^x w_1'^2\,dx = \tfrac{1}{2} M_1^2 h e^{2hx} + 2 M_1 P_1 e^{hx} + P_1^2 x + 32515,26;$$

$$(46)'\quad \begin{cases} \int_0^x w_2'^2\,dx = \tfrac{1}{2} M_2^2 h e^{2hx} + 2 M_2 P_2 e^{hx} + P_2^2 x + 620,63, \\ \int_0^x (x-a) w''_2\,dx = M_2 h\left(x - a - \frac{1}{h}\right) e^{hx} - 97,600, \\ \int_0^x (x-a) w'_1 w''_2\,dx = \frac{1}{2} M_2^2 h^2 \left(x - a - \frac{1}{2h}\right) e^{2hx} \\ \qquad\qquad + M_2 P_2 h\left(x - a - \frac{1}{h}\right) e^{hx} - 16648,31 \end{cases}$$

Nous pouvons à présent calculer les ordonnées du double profil, pour une valeur donnée de x, par exemple pour $x = 30$.

On a successivement, dans l'ordre des calculs,

$$w_1 = +218,02, \quad \text{d'après l'express. } (44),$$
$$w'_1 = +15,123, \quad \text{»} \quad (44),$$
$$\int_0^x w'^2_1 dx = +1877,13, \quad \text{»} \quad (46),$$
$$w_2 = -1,464, \quad \text{»} \quad (44)',$$
$$w'_2 = -0,5182, \quad \text{»} \quad (44)',$$
$$\int_0^x w'^2_2 dx = +0,50, \quad \text{»} \quad (46)',$$
$$\int_0^x (x-a) w''_2 dx = -11,492, \quad \text{»} \quad (46)'',$$
(47) $$\int_0^x (x-a) w'_2 w''_2 dx = +3,105, \quad \text{»} \quad (46)',$$
$$w''_2 = -0,1422, \quad \text{d'après la } 2^e \text{ express. } (39) \text{ et } 1^{re} (41),$$
$$\varphi''_2(w_1) = +0,178, \quad \text{»} \quad 1^{re} \quad \text{»} \quad (38)$$
$$\varphi'_1(w_1) = +0,6937, \quad \text{»} \quad 1^{re} \quad \text{»} \quad (40) \text{ derniers termes,}$$
$$w''_1 = +0,8103, \quad \text{»} \quad 2^e \quad \text{»} \quad (38) \text{ et } 1^{re} (40),$$
$$w'''_2 = -0,0135, \quad \text{»} \quad 3^e \quad \text{»} \quad (39) \text{ et } 2^e (41),$$
$$\varphi''_1(w_1) = +0,0010, \quad \text{»} \quad 2^e \quad \text{»} \quad (40) \text{ derniers termes,}$$
$$w'''_1 = +0,0545, \quad \text{»} \quad 3^e \quad \text{»} \quad (38) \text{ et } 2^e (40);$$

l'équation réduite eût donné

$$w''_1 = 0,849, \quad w'''_1 = 0,0188,$$
$$w''_2 = -0,095, \quad w'''_2 = -0,0021.$$

On en déduit

(47)' $$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(\varphi'_1(w_1))}{\varphi_1(w_1)} = +3,8972, & \dfrac{(\varphi''_1(w_1))}{(\varphi'_1(w_1))} = +0,0014, \\ \dfrac{w''_1}{w'_1} = +0,5358, & \dfrac{w'''_1}{w''_1} = +0,0672; \end{array} \right.$$

par suite, l'expression fondamentale (23), savoir

$$F(z) = F(w) - \frac{(F'(w))}{\frac{(\varphi'(w))}{\varphi(w)} + \frac{1}{2}\left(\frac{(F''(w))}{(F'(w))} - \frac{(\varphi''(w))}{(\varphi'(w))}\right)},$$

donnera, en mettant φ_1 pour φ et successivement z_1, ainsi que ses dérivées, puis l'intégrale définie désignée plus haut, pour $F(z)$,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} z_1 &= 218,020 - 3,632 = 214,388,\\ z'_1 &= 15,123 - 0,206 = 14,917,\\ z''_1 &= 0,8103 - 0,0140 = 0,7963,\\ \int_0^x z_1'^2\,dx &= 1877,13 - 50,02 = 1827,11; \end{aligned}\right.$$

les seconds termes de ces quantités proviennent respectivement des divisions suivantes :

$$\frac{15,123}{4,164},\quad \frac{0,8103}{3,936},\quad \frac{0,0545}{3,897},\quad \frac{222,52}{4,452}.$$

Avec ces valeurs de z_1, z'_1, . . ., on calcule les quantités

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_2(w_2) &= +0,0474, && \text{d'après la 1re express. (39)},\\ (\varphi'_2(w_2)) &= -0,1084, && \text{» 1re » (41) derniers termes},\\ w''_2 &= -0,1364, && \text{» 2e » (39) et 1re (41)},\\ (\varphi''_2(w_2)) &= -0,0061, && \text{» 2e » (41) derniers termes},\\ w'''_2 &= -0,0161, && \text{» 3e » (39) et 2e (41)}. \end{aligned}\right.$$

On en déduit, avec les quantités w_2, w'_2 de (17),

$$(19)'\quad \left\{\begin{aligned} \frac{(\varphi'_2(w_2))}{\varphi_2(w_2)} &= -2,2870, & \frac{(\varphi''_2(w_2))}{(\varphi'_2(w_2))} &= +0,0562,\\ \frac{w''_2}{w'_1} &= +0,2631, & \frac{w'''_2}{w''_2} &= +0,1180. \end{aligned}\right.$$

et l'expression fondamentale (23) donne

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} z_2 &= -1,464 - 0,238 = -1,702,\\ z'_2 &= -0,5182 - 0,0604 = -0,5786,\\ z''_2 &= -0,1364 - 0,0070 = -0,1434,\\ \int_0^x z'^2_2\,dx &= +0,50 + 0,13 = +0,63; \end{aligned}\right.$$

les seconds termes de ces quantités proviennent respectivement des divisions

$$\frac{0,5182}{2,1736},\quad \frac{0,1364}{2,2561},\quad \frac{0,0161}{2,287},\quad \frac{0,268}{2,052}.$$

Pour le calcul des deux dernières intégrales définies de (47), on a respectivement

$$\frac{(F''(w_2))}{(F'(w_2))} = \frac{(x-a)w'''_2}{(x-a)w'_2} = 0,118,$$

$$\frac{(F''(w_2))}{(F'(w_2))} = \frac{(x-a)(w'_2w'''_2 + w''^2_2)}{(x-a)w'_2w_2} = 0,381,$$

et ensuite

$$(50)'\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^x (x-a)z''_2\,dx &= -11,492 - 1,512 = -13,004,\\ \int_0^x (x-a)z'_2z''_2\,dx &= +3,105 + 0,832 = +3,937; \end{aligned}\right.$$

les seconds termes proviennent des divisions

$$\frac{2,410}{2,256},\quad \frac{1,767}{2,124}.$$

Nous pouvons vérifier maintenant, au moyen des quantités obtenues (48), (50), (50)', si les équations proposées sont satisfaites; nous avons ainsi

$$\varphi_1(z_1) = +0,0268,$$
$$\varphi_1(z_2) = -0,0008.$$

Ce résultat montre qu'avec les formules dont nous avons fait usage et pour l'approximation qui convient il n'est pas avantageux de calculer les ordonnées des profils, au delà de $x = 30$, sans changer de

valeurs initiales. Cependant, au moyen de la méthode d'exhaustion, il est possible d'avoir une approximation plus grande que celle que nous obtenons, et même, avec la convergence donnée par l'expression fondamentale (23), on peut arriver rapidement au même résultat par un simple procédé de répétition.

En effet, substituant les valeurs obtenues dans le second terme de la première expression (40), on a

$$(\varphi_1'(z_1)) = +0,7019,$$

d'où

$$\frac{\varphi_1(z_1)}{(\varphi_1'(z_1))} = +0,0382,$$

et l'expression fondamentale réduite à ses deux premiers termes,

$$F(z) = F(w) - \frac{\varphi(z)}{(\varphi'(z))}(F'(w)),$$

donne, en prenant les quantités (48) pour valeurs fondamentales,

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} z_1 &= 214,388 - 0,0382 \,.\, 14,917 = 213,818, \\ z_1' &= 14,9168 - 0,0382 \,.\, 0,7963 = 14,8864, \\ z_1'' &= 0,7963 - 0,0382 \,.\, 0,0545 = 0,7942, \\ \int_0^x z_1'^2 dx &= 1827,11 - 0,0382 \,.\, 222,52 = 1818,61. \end{aligned}\right.$$

Avec ces nouvelles valeurs (51) et les précédentes (50) et (50)', les équations proposées donnent comme vérification

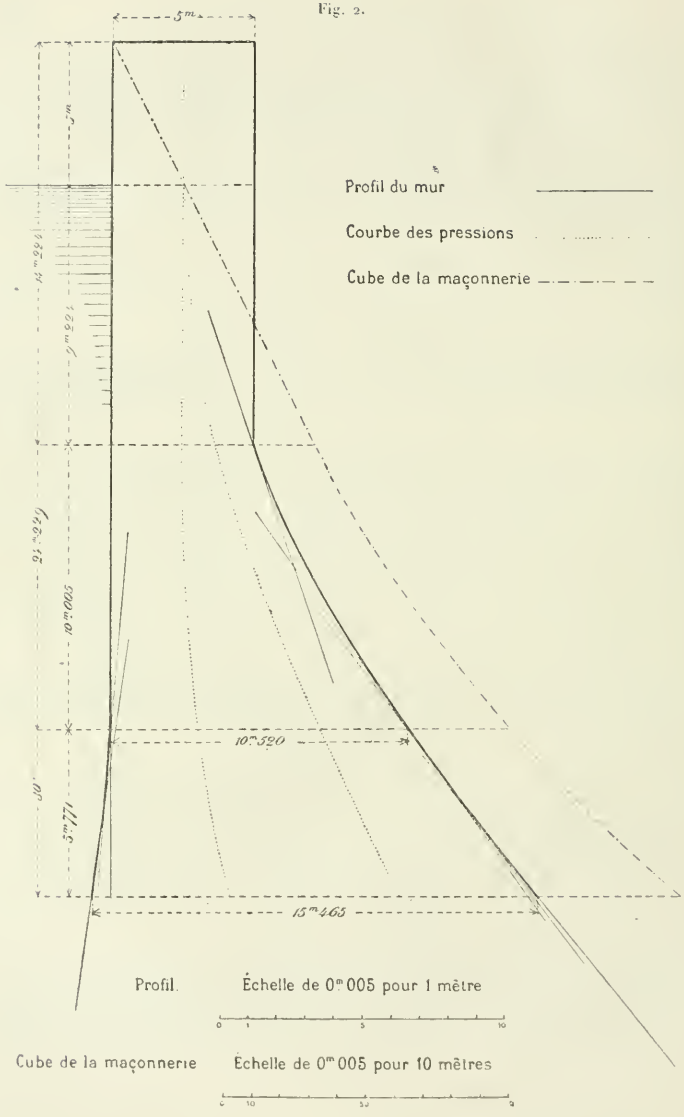
$$\varphi_1(z_1) = 14,8864 - 4,9338 - 9,9499 = -0,0027,$$
$$\varphi_2(z_2) = -0,5786 + 4,7893 - 4,2176 = -0,0069;$$

de là on déduit

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= 14,8864 - 9,9499 = 4,9365, && \text{d'après l'express. (7)} \\ \lambda_1 &= \frac{2}{3}\,\frac{222,022}{u_1} = 29,984, && \text{»} \quad (10) \end{aligned}\right.$$

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} u_2 &= +0,5786 + 4,2176 = 4,7962, && \text{»} \quad (8) \\ \lambda_2 &= \frac{2}{3}\,\frac{215,52}{u_2} = 29,954 && \text{»} \quad (12) \end{aligned}\right.$$

Fig. 2.


5m
Profil du mur
Courbe des pressions
Cube de la maçonnerie
10m520
15m465
Profil. Échelle de 0m005 pour 1 mètre
Cube de la maçonnerie Échelle de 0m005 pour 10 mètres

Les résultats auxquels nous parvenons présentent donc toute l'exactitude désirable; nous vérifions encore, par les valeurs de u_1 et u_2 comparées au tiers de l'épaisseur du mur $\frac{1}{3}(z'_1 + z'_2) = 5,155$, que les expressions (7), (8), (10) et (12), d'où nous avons déduit les équations du problème (37), sont bien celles qu'il convenait de choisir.

Nous avons ainsi les principales quantités qui déterminent le profil d'égale résistance jusqu'à 30^m; il serait facile à présent de calculer les valeurs intermédiaires et même de poursuivre le calcul du profil jusqu'à 40^m ou 50^m.

L'épure ci-jointe (*fig.* 2) résume les résultats obtenus :

la quantité $z_1 + z_2$ donne le cube de maçonnerie par metre courant de l'ouvrage,
z_1 et z'_2 donnent les ordonnées du profil du mur,
z'_1 et z_2 l'inclinaison des profils sur la verticale,
u_1 et u_2 les points de rencontre des résultantes des pressions sur chaque joint fictif horizontal.

Nous terminons ce dernier exemple, qui offrait quelque intérêt à cause des difficultés mêmes. Nous avons refait les calculs à plusieurs reprises afin de nous rendre un compte exact des résultats que pouvait donner la méthode secondaire; nous avons même effectué les intégrations par un moyen complètement différent [1], et nous sommes aujourd'hui convaincu que les méthodes de Wronski, quand elles seront connues, devront se substituer rapidement aux procédés ordinaires, presque toujours insuffisants et compliqués; les transcendantes élémentaires pratiques se réduiront alors aux logarithmes et aux sinus de tous les ordres, ces fonctions comprenant les exponentielles et les sinus du cercle.

La méthode que nous faisons connaître peut avoir des maintenant de nombreuses applications, mais la réussite dépendra surtout d'un choix judicieux des quantités arbitraires qui entrent dans les formules. On sera assuré d'avoir rempli les conditions voulues quand les

---

[1] Nous voulons parler de la Méthode secondaire systématique que nous avons rétablie avant celle-ci.

inconnues et les fonctions de ces inconnues engagées dans les équations seront toutes données par des développements d'une convergence à peu près égale.

On ne peut reprocher aux calculs qui précèdent d'être longs à exécuter : les avantages qu'ils présentent les rend bien supérieurs par la précision aux tracés d'épures et à tous les autres moyens employés, ils n'ont pas d'équivalents; les deux ou trois jours de calcul qu'ils peuvent au plus réclamer sont peu de chose comparés aux trois ou quatre campagnes que nécessite la construction des grands murs de réservoirs; d'ailleurs, quelles précautions ne doit-on pas prendre pour assurer la réussite de pareils ouvrages? Les calculs ne sont pas aussi pénibles qu'ils semblent être au premier abord : il suffit d'examiner la disposition des formules (38), (39), (40) et (41) pour s'en convaincre et, en faisant usage de procédés expéditifs, le travail se trouve très sensiblement réduit; c'est ainsi que nous avons obtenu très simplement les dérivées secondes de φ_1 et de φ_2 au moyen de la règle à calcul.

Dans la pratique, les profils ne se déterminent pas comme nous l'avons admis; pour des raisons relatives à l'exécution des travaux, les murs présentent un fruit dès la partie supérieure et les raccords des diverses courbes ont lieu insensiblement; il suffit donc de vérifier si le profil que l'on adopte ne s'écarte pas trop des conditions d'égale résistance, en considérant les sections de rupture probable et non des joints fictifs horizontaux qui n'ont aucune raison d'être *a priori* d'après le mode de construction usité en pareils cas. Enfin si l'on admet, comme on doit le faire pour les matériaux avec lesquels sont construits ces ouvrages, une résistance supérieure à celle de 6^{kg} que nous avons supposée, les calculs se trouveront notablement simplifiés pour une même hauteur, et on réalisera de plus une économie sur la construction; en effet, jusqu'à une hauteur de 40^{m} environ, et même au delà, et pour une résistance de 8^{kg} à 9^{kg} par centimètre carré, la partie courbe d'amont n'aura pas de raison d'être et les calculs ne se rapporteront qu'à l'intégration d'une seule équation différentielle, comme l'équation (16).

Mais ces considérations sont étrangères à notre sujet : notre but était d'indiquer seulement la marche des calculs dans une application importante de la nouvelle méthode.

RÉSUMÉ DE LA MÉTHODE.

Avant d'abandonner le sujet qui nous occupe, il ne sera peut-être pas inutile de donner l'expression calculée du troisième progrès de la génération neutre. D'après les notations adoptées, nous avons, en mettant pour simplifier φ à la place de $\varphi(w)$,

$$(107)\quad y = w - \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\varphi')}w' \frac{2\frac{w'''}{w''}\frac{w''}{w'} - 3\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 + 6\frac{(\varphi')}{\varphi}\frac{w''}{w'} - 3\frac{(\varphi'')}{(\varphi')}\left[2\frac{(\varphi')}{\varphi} - \frac{(\varphi)}{(\varphi')} + \frac{2}{3}\frac{(\varphi'')}{(\varphi')}\right]}{\frac{w'''}{w''}\frac{w''}{w'} + 3\left[\frac{(\varphi')}{\varphi} - \frac{(\varphi'')}{(\varphi')}\right]\frac{w''}{w'} - 3\frac{(\varphi'')}{(\varphi')}\left[\frac{(\varphi')}{\varphi} - \frac{(\varphi'')}{(\varphi')} + \frac{1}{3}\frac{(\varphi''')}{(\varphi')}\right]}.$$

Ce troisième progrès ne se réduit pas au second en faisant $w'' = 0$ et $\varphi''' = 0$. Si au lieu de y on avait $F(y)$ dans le premier membre, il suffirait dans le second de mettre $F(w)$, $(F'(w))$, $(F''(w))$, $(F'''(w))$ au lieu de w, w', w'', w'''.

Nous nous sommes servi de cette expression pour résoudre l'équation transcendante (32) du dernier exemple, en partant de la valeur fondamentale $w = 23$, de l'inconnue x, au lieu de celle que nous avons admise dans les calculs précédents, $w = 24$; l'expression (107) prend alors la forme plus simple

$$(108)\qquad y = w - \frac{1}{2}\frac{\varphi}{(\varphi')}w' \frac{2\frac{(\varphi')}{\varphi} - \frac{(\varphi'')}{(\varphi')} + \frac{2}{3}\frac{(\varphi''')}{(\varphi'')}}{\frac{(\varphi')}{\varphi} - \frac{(\varphi'')}{(\varphi')} - \frac{1}{3}\frac{(\varphi''')}{(\varphi')}}.$$

Précisons aussi les caractères principaux de la méthode.

1° Toute équation à résoudre ou à intégrer par rapport à une inconnue y,

$$\varphi(y) = 0$$

a pour solution (2) ou $(22)''$, cette inconnue pouvant dépendre d'une variable indépendante x, ou de plusieurs; plus généralement une fonction déterminée de l'inconnue, $F(y)$, a pour expression (3) ou (22) à laquelle on substitue dans la pratique une réduite telle que (107). Ces expressions fondamentales contiennent une quantité w totalement

arbitraire en principe, et sont par conséquent des expressions techniques; elles diffèrent en cela des expressions théoriques dont on fait ordinairement usage.

2° Quelle que soit la convergence, ou la divergence, de l'expression (3), les coefficients étant des fonctions déterminées de φ et de F formées avec les différentielles de ces fonctions, aucune fonction autre que la fonction $F(y)$, qui dépend de l'équation proposée, ne peut être représentée par cette expression. Il en résulte nécessairement que l'expression fondamentale représente dans tous les cas la fonction cherchée. C'est là un point très important qui, cependant, n'est généralement pas admis.

3° Les différentielles des fonctions φ et F, ou leurs dérivées, sont prises seulement par rapport à la quantité ϖ [1]. S'il existe plusieurs inconnues $y_1, y_2, \ldots$, toutes doivent être considérées comme fonctions de celle d'entre elles qui sera calculée au moyen de l'équation dont il s'agit. C'est pour cette raison que cette équation, qui devrait s'écrire

$$\varphi(y_1, y_2 \ldots y_\alpha \ldots x_1, x_2, \ldots) = 0,$$

est simplement notée

$$\varphi(y_\alpha) = 0,$$

y_α étant l'inconnue désignée.

4° La résolution, ou l'intégration, d'une équation est donc ramenée par cette méthode au calcul des dérivées de l'inconnue et à la détermination de la quantité ϖ.

5° Cette quantité ϖ, *appelée valeur fondamentale*, s'obtient au moyen d'une équation réduite que l'on peut toujours former, même de plusieurs manières.

6° Dans les applications, il est nécessaire que les développements présentent une convergence suffisante; la condition principale de cette convergence est que la valeur fondamentale ϖ diffère aussi peu que

[1] Nous avons fait usage d'une ancienne notation des différentielles partielles, au lieu de celle qui est adoptée ordinairement; la première a l'avantage de pouvoir être employée pour les dérivées partielles, ainsi que cela se présente dans les expressions (107) et (108).

possible de l'inconnue y, ce qui conduit à rechercher des équations réduites différant aussi peu que possible de l'équation proposée. Aussi l'équation réduite devra-t-elle être de même nature que celle-ci, c'est-à-dire que ces équations devront être du même degré ou du même ordre.

7° Si l'on ne pouvait obtenir ainsi la convergence voulue, on aurait recours, pour augmenter la convergence, et même pour y parvenir si elle n'existe pas primitivement, à l'un des procédés auxiliaires indiqués, lesquels peuvent être mis en usage ensemble ou séparément.

8° Si l'équation réduite ne donne pas les dérivées fondamentales avec une approximation suffisante, on aura recours à la différentiation de l'équation proposée, ou des équations, s'il en existe plusieurs, et par de simples résolutions d'équations linéaires on obtiendra, dans tous les cas, les dérivées cherchées à partir de l'ordre immédiatement supérieur à celui qui caractérise l'équation proposée comme équation différentielle. Ainsi pour les équations algébriques ou transcendantes, ou pour les équations aux différences finies, les dérivées peuvent être toutes ainsi calculées.

9° Si les dérivées de φ par rapport à y se confondent avec les dérivées totales de cette fonction, l'expression fondamentale présentera une indétermination. On évite cet inconvénient en considérant une ou plusieurs fonctions de y entrant dans les coefficients de l'équation comme des fonctions de x, et, conduisant les calculs comme dans le cas ordinaire, on parviendra, par des approximations successives, à obtenir l'inconnue [1].

Malgré les imperfections que l'on aura pu rencontrer dans notre travail, nous espérons nous être fait suffisamment comprendre pour qu'il soit possible dès maintenant de faire l'application de cette méthode aux questions difficiles de Mécanique et d'Astronomie, Sciences qui sont aujourd'hui arrêtées dans leurs développements, par l'impossibilité où l'on est de résoudre ou d'intégrer avec une exactitude suffisante les équations que l'on est parvenu à établir.

---

[1] Ce procédé nous paraît être le seul applicable dans ce cas, contrairement à ce que nous avons indiqué, à propos de l'intégration des équations différentielles, dans la note qui fait suite à l'expression (23)''.

Dans un complément nous donnerons les démonstrations et les développements théoriques que nous avons dû omettre jusqu'ici.

A présent, nous pouvons citer les paroles suivantes de Wronski [1], elles ne paraîtront sans doute plus exagérées :

Nous obtenons donc ainsi, d'une manière absolument générale, par l'application de notre méthode élémentaire secondaire, la solution complète des équations conjointes, quels que soient leur nombre et leur genre, soit primitives, immanentes ou transcendantes, soit dérivées, aux différences ou aux différentielles totales ou partielles. Et les géomètres remarqueront sans doute que c'est là précisément la solution du problème le plus grand et le plus difficile de leur science, de ce problème immense qu'ils osaient à peine envisager dans son infinie généralité.

Il nous reste à adresser tous nos remercîments à M. Resal qui a bien voulu accueillir ce travail dans son Journal ; nous lui en sommes d'autant plus reconnaissant que, jusqu'à ces temps derniers, les géomètres, pour la plupart, ont accordé peu de faveur à tout ce qui se rapporte à l'œuvre de Wronski. Nous remercions également M. Yvon Villarceau, le savant astronome, d'avoir bien voulu nous donner ses encouragements et ses conseils pendant la rédaction de ce Mémoire.

---

(1) *Réforme,* t. I, page cxvij.

Sur l'équilibre d'un cylindre élastique;

PAR M. SCHIFF,

Professeur à l'Académie d'Artillerie de Saint-Pétersbourg.

Dans la théorie de l'élasticité des corps solides, on est obligé, afin d'éviter les difficultés qui se présentent dans la résolution des problèmes, de faire certaines hypothèses sur la nature des forces d'élasticité, suivant le cas que l'on considère. Ces hypothèses se rapprochent plus ou moins de la réalité et facilitent l'intégration des équations de l'élasticité.

Dans un grand nombre de cas, ce mode de résolution des problèmes est d'une grande fécondité, les solutions obtenues à l'aide de ces hypothèses étant bien d'accord avec les résultats de l'expérience. Mais il y a des cas où les solutions ainsi obtenues se trouvent en contradiction avec l'expérience. Une telle contradiction s'observe, par exemple, quand on traite le problème de la pression des cylindres.

Dans ce cas, les résultats obtenus comme conséquence de l'important et très élégant problème de M. de Saint-Venant diffèrent beaucoup des résultats fournis par l'expérience. Nous allons examiner les causes principales de cette contradiction :

1° Dans la solution du problème de M. de Saint-Venant, on admet que les fibres parallèles à l'axe du cylindre ne subissent pas de pressions

normales, ce qui n'est vrai que pour les fibres formant la surface latérale du cylindre; mais rigoureusement on ne peut pas affirmer la même chose lorsqu'il s'agit des fibres situées au milieu du cylindre; celles-ci peuvent subir des pressions normales.

2° Dans la théorie, on admet que l'effort de la pression est dirigé rigoureusement suivant l'axe du cylindre; mais ceci est difficile à réaliser; ordinairement, en dépit de tous les efforts qu'on met à centrer le cylindre, son axe fait un angle, quoique très faible, avec la direction de la pression; de là résulte une flexion, qui est la cause de la différence entre le phénomène observé et les prévisions de la théorie.

3° Entre les plans des bases du cylindre et les plans qui le compriment il se produit un frottement, quelquefois assez considérable, qu'on néglige dans la solution du problème de M. de Saint-Venant.

4° En discutant le problème, on admet que le corps est parfaitement isotrope, ce qui n'est pas tout à fait rigoureux.

On admet ordinairement que la différence entre la théorie et la réalité, dans le cas considéré, proviennent seulement de la deuxième et de la quatrième des causes indiquées; mais il faut admettre que les autres causes jouent un rôle, sinon plus grand, au moins aussi important.

Je m'en suis assuré dans une série d'expériences sur la pression de cylindres de caoutchouc que j'avais exécutés dans le but d'étudier les particularités de cette substance. Dans ces expériences, j'ai constaté les effets suivants :

1° Le cylindre se change pendant la pression en une sorte de corps de révolution convexe.

2° Quand on retire le corps de la presse, après une pression considérable, les bases du cylindre cessent d'être planes, en prenant la forme de surfaces de révolution. Si, au lieu de cylindres, on comprime des troncs de cône, des segments sphériques ou ellipsoïdaux, ceux-ci, grâce aux concavités qui se forment, se trouvent, quand la pression cesse, fortement attachés à la partie de la presse en contact avec les bases, de sorte que, pour les en arracher, il faut employer un effort assez considérable

3° Si l'on coupe un cylindre ainsi déformé suivant un plan diamétral, ce dernier se change, presque instantanément, en une surface qui rappelle beaucoup celle d'un paraboloïde hyperbolique.

Tous ces phénomènes nous paraissent prouver clairement, au moins pour le caoutchouc, que pendant la pression il se produit en effet, entre les surfaces en contact, un très grand frottement, et que les fibres parallèles à l'axe subissent des pressions normales. J'ai essayé de diminuer le frottement, en graissant les bases du cylindre avec de la stéarine, du talc ou du graphite. Dans ces conditions, la déformation du cylindre était chaque fois notablement moindre et les compressions étaient beaucoup plus grandes que celles qu'on pouvait obtenir avec des cylindres de mêmes dimensions non graissés, soumis aux mêmes efforts, toutes les autres conditions restant identiques d'ailleurs.

Certes, tous ces résultats des essais faits avec le caoutchouc ne peuvent pas être entièrement appliqués au cas de la compression d'un solide élastique; néanmoins on peut affirmer que, même dans un tel corps, il se passe quelque chose d'analogue, les effets ne différant dans les deux cas que par leur degré d'intensité. Ce que je viens de dire s'est trouvé confirmé par des essais que j'avais faits avec un grand nombre d'échantillons de caoutchouc en allant des plus mous aux plus durs jusqu'à l'ébonite. On voyait clairement la transition successive du caoutchouc au solide élastique; les phénomènes indiqués se produisaient toujours. Ces expériences m'ont conduit à m'occuper du problème suivant :

Trouver l'état d'équilibre d'un solide de révolution terminé par deux bases planes soumises à des forces normales appliquées à sa surface latérale et à des forces tangentielles appliquées à ses bases, ces dernières forces étant symétriques par rapport à l'axe.

En rapportant le corps aux coordonnées semi-polaires r, φ et z, il faut admettre que tous les points situés sur la même circonférence de la section transversale reçoivent les mêmes déplacements. Ceux-ci sont indépendants de l'angle φ. Dans ce qui va suivre, nous nous proposons

de donner la résolution de notre problème pour le cas d'un cylindre, en nous servant des coordonnées semi-polaires.

Dans une Note postérieure, nous tâcherons de résoudre ce problème dans le cas plus général d'un solide de révolution quelconque; nous serons alors obligé d'employer les coordonnées curvilignes orthogonales, que Lamé désigne sous le nom de *coordonnées isostatiques*, celles-ci étant en effet les plus commodes dans la résolution des problèmes de la théorie de l'élasticité.

Rapportons le solide aux coordonnées semi-polaires et désignons par

u, v et w les déplacements suivant le rayon, la perpendiculaire au plan méridien et l'axe;

λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 les déformations;

p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 les tensions normales et tangentielles.

Comme toutes ces quantités ne dépendent que de leur distance à l'axe et au plan des coordonnées, c'est-à-dire de r et de z, nous aurons, en supposant le cylindre isotrope,

$$p_1 = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu\theta}{1-2\mu} + \lambda_1\right), \quad p_2 = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu\theta}{1-2\mu} + \lambda_2\right),$$

$$p_3 = \frac{E}{1+\mu}\left(\frac{\mu\theta}{1-2\mu} + \lambda_3\right), \quad p_4 = \frac{E}{2(1+\mu)}\lambda_4,$$

$$p_5 = \frac{E}{2(1+\mu)}\lambda_5, \qquad p_6 = \frac{E}{2(1+\mu)}\lambda_6$$

ou

$$\lambda_1 = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \lambda_2 = \frac{u}{r},$$

$$\lambda_3 = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \lambda_4 = \frac{r\,\partial\left(\frac{v}{r}\right)}{\partial r},$$

$$\lambda_5 = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \lambda_6 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}.$$

E et μ sont les coefficients de l'élasticité longitudinale et transversale et θ la dilatation cubique.

Les équations générales d'équilibre du cylindre seront

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{r}(p_1 - p_2) + \frac{\partial p_6}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{2}{r}p_2 + \frac{\partial p_5}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial p_6}{\partial r} + \frac{1}{r}p_6 + \frac{\partial p_3}{\partial z} = 0,$$

ou bien

$$(1) \qquad \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Les équations d'équilibre sur les surfaces latérales sont

$$(4) \quad (p_1)_{r=R} = T, \quad (p_1)_{r=R_1} = T_1, \quad (p_4)_{r=R} = (p_4)_{r=R_1} = (p_6)_{r=R} = (p_6)_{r=R_1} = 0,$$

où R et R_1 sont les rayons extérieur et intérieur du cylindre, T et T_1 les pressions normales, rapportées à l'unité de surface et appliquées aux surfaces latérales.

Pour intégrer ces équations, nous poserons

$$u = \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad v = \frac{\partial v_1}{\partial r}, \quad w = \frac{\partial w_1}{\partial r};$$

il vient, en substituant,

$$\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}\right) = 0$$

Comme nous n'avons besoin que des expressions $\frac{\partial u_1}{\partial r}$, $\frac{\partial v_1}{\partial r}$ et $\frac{\partial w_1}{\partial z}$, nous pouvons, en intégrant ces équations, annuler les fonctions arbitraires de l'intégration; nous aurons ainsi

$$(1') \qquad \frac{1}{1-2\mu}\theta + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0,$$

$$(2') \qquad \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = 0,$$

$$(3') \qquad \frac{1}{1-2\mu}\theta + \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = 0$$

et

$$(4') \qquad \theta = \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}.$$

En retranchant l'équation (3') de (1'), il vient

$$\frac{\partial^2(u_1 - w_1)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_1 - w_1)}{\partial r} + \frac{\partial^2(u_1 - w_1)}{\partial z^2} = 0.$$

Cette équation donne, après l'intégration,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_1 - w_1 &= \alpha(r^2 - 2z^2) + \log r(\beta z + \gamma) \\ &\quad + \delta z + \delta_0 + \sum_i \rho_i(e^{m_i z} + q_i e^{-m_i z}), \end{aligned} \right.$$

où α, β, γ, δ, δ_0, m_i, q_i sont des constantes arbitraires et ρ_i une fonction de r, déterminée par l'équation

$$\frac{d^2\rho_i}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\rho_i}{dr} + m_i^2\rho_i = 0.$$

Désormais nous n'écrirons pas l'indice i et nous désignerons les dérivées de ρ par ρ', ρ'', ...

L'équation (1') donne

$$\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\theta = -\frac{\partial^2(u_1 - w_1)}{\partial z^2} = -2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \frac{1}{2(1-\mu)}\left[-4\alpha + \sum m^2 \rho(e^{mz} + qe^{-mz})\right].$$

En posant

$$u_1 = u_2 - \frac{1}{4(1-\mu)}\sum r\rho'(e^{mz} + qe^{-mz}) - \frac{\alpha z^2}{1-\mu},$$

nous aurons

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 0,$$

d'où

$$u_2 = \alpha'(r^2 - 2z^2) + \log r(\beta' z + \gamma') + \delta' z + \delta_0 + \sum \omega(e^{m'z} + q'e^{-m'z}),$$

où

$$\omega'' + \frac{1}{r}\omega' + m'^2\omega = 0;$$

d'où

$$\begin{aligned} u_1 &= ar^2 + bz^2 + \log r(cz + d) + ez + f \\ &\quad + \sum \omega(e^{m'z} + q'e^{-m'z}) - \frac{1}{4(1-\mu)}\sum r\rho'(e^{mz} + qe^{-mz}), \\ w_1 &= a_1 r^2 + b_1 z^2 + \log r(c_1 z + d_1) + e_1 z + f_1 + \sum \omega(e^{m'z} + q'e^{-m'z} \\ &\quad - \frac{1}{4(1-\mu)}\sum r\rho'(e^{mz} + qe^{-mz}) - \sum \rho(e^{mz} + qe^{-mz}), \end{aligned}$$

ou bien

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} u &= 2ar + \frac{cz+d}{r} \\ &\quad + \sum \omega'(e^{m'z} + q'e^{-m'z}) + \frac{1}{4(1-\mu)}\sum m^2 r\rho(e^{mz} + qe^{-mz}), \\ w &= 2b_1 z + c_1 \log r + e_1 + \sum m'\omega(e^{m'z} - q'e^{-m'z}) \\ &\quad - \sum m\rho(e^{mz} - qe^{-mz}) - \frac{1}{4(1-\mu)}\sum mr\rho'(e^{mz} - qe^{-mz}). \end{aligned}\right.$$

Prenons le milieu de l'axe pour origine des coordonnées et remarquons que w est une fonction impaire de z; nous aurons, en nous reportant aux conditions d'équilibre sur la surface latérale

$$c = c_1 = e_1 = 0, \quad q' = q = 1.$$

Nous devons encore poser $m' = m$, car autrement nous arriverions à une contradiction.

Posons

$$\omega - \frac{r\rho'}{4(1-\mu)} = \frac{\varepsilon + \rho}{2},$$

où ε doit satisfaire à l'équation

$$(7) \qquad \varepsilon' + \frac{1}{r}\varepsilon' + m^2\varepsilon = \frac{m^2\rho}{1-\mu}.$$

En l'introduisant dans les expressions de u et w, nous aurons

$$(6') \qquad \begin{cases} u = 2ar + \dfrac{d}{r} + \sum \dfrac{\varepsilon' + \rho'}{2}(e^{mz} + e^{-mz}), \\ w = 2b_1 z + \sum m\dfrac{\varepsilon - \rho}{2}(e^{mz} - e^{-mz}). \end{cases}$$

De (2'), en nous reportant aux équations d'équilibre, nous obtiendrons pour c_1 et v les expressions suivantes :

$$c_1 = \frac{r^2}{2}(a_2 z + b_2) - \left(\frac{a_2 z^3}{3} + b_2 z^2 + c_2 z + d_2\right) + \sum (\Phi(e^{nz} + q'' e^{-nz}),$$

$$v = r(a_2 z + b_2) + \sum (\Phi'(e^{nz} + q' e^{-nz}),$$

où

$$\Phi'' + \frac{1}{r}\Phi' + n^2\Phi = 0.$$

Les déformations et les tensions auront pour expressions

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 2a - \frac{d}{r^2} + \sum \frac{\varepsilon'' + \rho''}{2}\left(e^{mz} + e^{-mz}\right),\\
\lambda_2 &= 2a + \frac{d}{r^2} + \sum \frac{\varepsilon' + \rho'}{2r}\left(e^{mz} + e^{-mz}\right),\\
\lambda_3 &= 2b_1 + \sum m^2 \frac{\varepsilon - \rho}{2}\left(e^{mz} + e^{-mz}\right),\\
0 &= 4a + 2b_1 - \frac{1 - 2\mu}{2(1-\mu)} \sum m^2 \rho \left(e^{mz} + e^{-mz}\right),\\
\lambda_4 &= \sum r\left(\frac{1}{r}\Phi'\right)'\left(e^{nz} + q'' e^{-nz}\right),\\
\lambda_5 &= \sum n\Phi'\left(e^{nz} - q'' e^{-nz}\right) + a_2 r,\\
p_1 &= \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{2\mu}{1-2\mu}(2a + b_1) + 2a - \frac{d}{r^2} + \sum\left[\frac{\varepsilon'' + \rho''}{2} - \frac{\mu m^2 \rho}{2(1-\mu)}\right]\left(e^{mz} + e^{-mz}\right)\right\},\\
p_2 &= \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{2\mu}{1-2\mu}(2a + b_1) + 2a - \frac{d}{r^2} + \sum\left[\frac{\varepsilon' + \rho'}{2r} - \frac{\mu m^2 \rho}{2(1-\mu)}\right]\left(e^{mz} + e^{-mz}\right)\right\},\\
p_3 &= \frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{2\mu}{1-2\mu}(2a + b_1) + 2b_1 + \sum\left[\frac{m^2(\varepsilon - \rho)}{2} - \frac{\mu m^2 \rho}{2(1-\mu)}\right]\left(e^{mz} + e^{-mz}\right)\right\},\\
p_4 &= \frac{E}{2(1+\mu)} \sum r(r\Phi')'\left(e^{nz} + q'' e^{-nz}\right),\\
p_5 &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\sum n\Phi'\left(e^{nz} - q'' e^{-nz}\right) + a_2 r\right],\\
p_6 &= \frac{E}{2(1+\mu)} \sum m\varepsilon'\left(e^{mz} - e^{-mz}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations d'équilibre sur les surfaces donnent

$$
\left(\varepsilon'' + \rho'' - \frac{\mu m^2 \rho}{1-\mu}\right)_{r=R} = 0, \quad \left(\varepsilon'' + \rho'' - \frac{\mu m^2 \rho}{1-\mu}\right)_{r=R_1} = 0,
$$

$$
(\varepsilon')_{r=R} = 0, \quad (\varepsilon')_{r=R_1} = 0, \quad \left[r\left(\frac{1}{r}\Phi'\right)'\right]_{r=R} = 0, \quad \left[r\left(\frac{1}{r}\Phi'\right)'\right]_{r=R_1} = 0.
$$

En tenant compte des équations

$$(a) \qquad \rho'' + \frac{1}{r}\rho' + m^2\rho = 0,$$

$$(b) \qquad \varepsilon'' + \frac{1}{r}\varepsilon' + m^2\varepsilon = \frac{m^2\rho}{1-\mu},$$

$$(c) \qquad \Phi'' + \frac{1}{r}\Phi' + n^2\Phi = 0,$$

nous aurons

$$(10) \quad \begin{cases} (\varepsilon')_{r=R} = 0, \quad (\varepsilon')_{r=R_1}, \quad (\rho' + m^2 r\varepsilon)_{r=R} = 0, \quad (\rho' + m^2 r\varepsilon)_{r=R_1} = 0, \\ \left(\frac{2}{r}\Phi' + n^2\Phi\right)_{r=R} = 0, \quad \left(\frac{2}{r}\Phi' + n^2\Phi\right)_{r=R_1} = 0. \end{cases}$$

Quant aux intégrales des équations (a), (b) et (c), elles peuvent être exprimées sous la forme de séries convergentes, ou bien sous la forme d'intégrales définies. Ainsi les intégrales de l'équation (a) s'exprimeront de la manière suivante :

$$(11) \quad \begin{cases} \rho = C_1\left[1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i m^{2i} r^{2i}}{2^2.4^2\ldots(2i)^2}\right] \\ \qquad + C_2\left\{\log r\left[1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i m^{2i} r^{2i}}{2^2.4^2\ldots(2i)^2}\right] - \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i m^{2i} r^{2i}}{2^2\ldots(2i)^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{i}\right)\right\}, \end{cases}$$

ou bien

$$\rho = C_1\int_0^{\pi} \cos(mr\cos\alpha)\,d\alpha + C_2\int_0^{\pi} \cos(mr\cos\alpha)\log(r\sin^2\alpha)\,d\alpha \quad (^1),$$

ou

$$\rho = C_1\int_{-m\sqrt{-1}}^{m\sqrt{-1}} \frac{e^{\alpha z}}{\sqrt{\alpha^2+m^2}}\,d\alpha + C_2\int_{-m\sqrt{-1}}^{m\sqrt{-1}} \frac{e^{\alpha z}}{\sqrt{\alpha^2+m^2}}\log(r\alpha^2+m^2)\,d\alpha \quad (^2).$$

(1) Poisson, *Journal de l'École Polytechnique*, t. XII, Cah. XIX; 1823.
(2) S. Spitzer, *Vorlesungen über Differential-Gleichungen*, S. 16; 1878.

Dans le cas d'un cylindre plein les termes contenant les logarithmes disparaissent.

Dans les intégrales des équations (a), (b) et (c) il entre six constantes arbitraires : A, B, C, D, G et H. En outre, m et n restent encore indéterminés. Des équations (10) nous ne pouvons déterminer que les rapports des constantes, par exemple $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{H}{G}$ et, après les avoir éliminés de ces équations, nous en obtenons deux qui peuvent servir à déterminer m et n. Nous indiquons ici la manière de former ces équations seulement dans le cas d'un cylindre plein.

Nous nous réservons de donner dans un autre Mémoire la solution complète de notre problème pour le cas d'un vase cylindrique clos, ce dernier cas étant d'une grande importance dans les applications. Du reste, à l'exception des équations servant à déterminer m et n, toutes les autres sont les mêmes dans les deux cas.

Dans le cas d'un cylindre plein, nous avons

$$\rho = AK; \quad \omega = BK; \quad \varepsilon = (2B - A)K - \frac{A r K'}{2(1-\mu)}; \quad \phi = G'M,$$

où A, B et G sont des constantes arbitraires, K et M des intégrales de (11) ou de (12), qui ne renferment pas de logarithmes. Pour $r = R$, l'équation (10) devient

$$(d) \qquad (2B - A)K' + \frac{A m^2 RK}{2(1-\mu)} = 0,$$

$$(e) \qquad A\left[1 - \frac{m^2 R^2}{2(1-\mu)}\right]K' + (2B - A)m^2 RK = 0,$$

$$(f) \qquad 2M' + n^2 RM = 0;$$

de (d) et de (e) nous pouvons déterminer m et le rapport $\frac{2B - A}{A}$. En effet, nous en tirons

$$(g) \qquad [2(1-\mu) - m^2 R^2]K'^2 - m^4 R^2 K^2 = 0,$$

et

$$(h) \qquad \left(\frac{2B - A}{A}\right)^2 = 2(1-\mu) - m^2 B^2.$$

Pour représenter l'équation (g) sous forme d'une série, nous employons la méthode suivante, que nous empruntons à M. Kirchhoff [1].

Posons $K^2 = H_1$, $K'^2 = H_2$; alors, en vertu de (a), H_1 et H_2 se déterminent des équations suivantes :

$$(rH_1)'' + 4m^2(rH_1)' + \frac{H'_1}{r} = 0,$$

$$(rH_2)''' + 4m^2(rH_2)' - \frac{3H'_2}{r} = 0,$$

et, en intégrant ces équations,

$$K^2 = H_1 = \left[1 + \sum \frac{(-4)^i 3.5\ldots(2i-1)}{2^3.4^3\ldots(2i)^3} m^{2i} r^{2i}\right],$$

$$K'^2 = H_2 = \frac{m^4 r^2}{4}\left[1 + \sum_i \frac{(-4)^i.3.5\ldots(2i+1)}{2.4^2.6^3\ldots(2i)^3(2i+2)^2(2i+4)} m^{2i} r^{2i}\right].$$

Introduisons dans (g) les expressions obtenues :

$$[2(1-\mu) - n^2 R^2]\left[1 + \sum_i \frac{(-4)^i.3.5\ldots(2i+1)m^{2i}R^{2i}}{2.4^2.6^3\ldots(2i)^3(2i+2)^2(2i+4)}\right]$$
$$- 4\left[1 + \sum_i \frac{(-4)^i.3.5\ldots(2i-1)m^{2i}R^{2i}}{2^3.4^3\ldots(2i)^3}\right] = 0.$$

On voit que les valeurs de m^2R^2 ne dépendent ni des forces agissantes, ni des dimensions du cylindre; elles dépendent uniquement du coefficient μ, c'est-à-dire de la nature du cylindre.

Nous allons déterminer les autres constantes arbitraires. Pour cela, démontrons d'abord que

$$\int_{R_1}^{R} r(\rho'_1\varepsilon'_2 + \rho'_2\varepsilon'_1)\,dr = 0,$$

où ρ'_1, ρ'_2, ε'_1 et ε'_2 sont les valeurs de ces fonctions pour des valeurs différentes de m, m_1 et m_2.

---

[1] G. Kirchhoff, *Gesammelte Abhandlungen*, S. 264; 1882.

En effet, l'équation $\varepsilon'' + \frac{1}{r}\varepsilon' + m^2\varepsilon = \frac{m^2\rho}{1-\mu}$ donne

$$(13) \qquad r\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon')'\right]' = r\left(\frac{m^2\rho'}{1-\mu} - m^2\varepsilon'\right).$$

Mais

$$\int_{R}^{R} r\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon_1')'\right]\varepsilon_2'\,dr = \left[\varepsilon_2'(r\varepsilon_1')'\right]_{R_1}^{R} - \left[\varepsilon_1'(r\varepsilon_2')'\right]_{R_1}^{R} + \int_{R_1}^{R}\varepsilon_1' r\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon_2)'\right]dr.$$

En se reportant aux équations (10), on a

$$\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_2'\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon_1')'\right]'dr = \int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1'\left[\frac{1}{r}(r\varepsilon_2')'\right]'dr.$$

Grâce à cette égalité, nous déduisons de (13),

$$(14) \qquad (m_1^2 - m_2^2)\int_{R_1}^{R}\varepsilon_1'\varepsilon_2' r\,dr = \frac{-1}{1-\mu}\int_{R_1}^{R} r(m_2^2\rho_2'\varepsilon_1' - m_1^2\rho_1'\varepsilon_2')\,dr.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1'\varepsilon_2'\,dr &= (\varepsilon_1 r\varepsilon_2')_{R_1}^{R} - \int_{R_1}^{R}\varepsilon_1(r\varepsilon_2')'\,dr\\ &= m_2^2\int_{R_1}^{R}\varepsilon_1\left(r\varepsilon_2 - \frac{r\rho_2}{1-\mu}\right)dr\\ &= m_2^2\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1\varepsilon_2\,dr + \frac{1}{1-\mu}\int_{R_1}^{R}\varepsilon_1(r\rho_2)'\,dr,\end{aligned}$$

ou

$$\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1'\varepsilon_2' = m_2^2\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1\varepsilon_2\,dr + \frac{1}{1-\mu}(r\varepsilon_1\rho_1')_{R_1}^{R} - \frac{1}{1-\mu}\int_{R_1}^{R} r\rho_2'\varepsilon_1\,dr.$$

De la même manière, nous obtiendrons

$$\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1'\varepsilon_2'\,dr = m_1^2\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1\varepsilon_2\,dr + \frac{1}{1-\mu}(r\varepsilon_2\rho_1')_{R_1}^{R} - \frac{1}{1-\mu}\int_{R_1}^{R} r\rho_1'\varepsilon_2'\,dr.$$

En multipliant la première égalité par m_1^2, la seconde par m_2^2, et en

les retranchant l'une de l'autre, nous avons

$$\text{(H)}\quad \left\{ \begin{aligned} (m_1^2 - m_2)\int_{R_1}^{R} r\varepsilon_1\varepsilon_2'\,dr = {} & \frac{1}{1-\mu}\Big(r\rho_2'\varepsilon_1 m_1^2 - r\rho_1'\varepsilon_2 m_2^2\Big)_{R_1}^{R} \\ & - \frac{1}{1-\mu}\int_{R_1}^{R} r\big(m_1^2\rho_2'\varepsilon_1' - m_2^2\rho_1'\varepsilon_2\big)\,dr. \end{aligned} \right.$$

Mais, en tenant compte des équations (10),

$$(\rho' + m^2 r\varepsilon)_{r=R_1} = (\rho' + m^2 r\varepsilon)_{r=R} = 0,$$

nous en concluons que l'expression entre crochets est égale à zéro. On a, en retranchant ensuite (I) de (H),

$$\int_{R_1}^{R} (\rho_1'\varepsilon_2 + \rho_2'\varepsilon_1)\, r\,dr = 0.$$

De la même manière, on peut démontrer que $\int_{R_1}^{R} r\phi_1'\phi_2\,dr = 0$, où ϕ_1' et ϕ_2' sont deux valeurs correspondantes de cette fonction pour deux valeurs différentes de n_1 et n_2, qu'on tire des équations

$$\text{(A)}\qquad (2\phi' + n^2 r\phi)_{r=R} = 0, \quad (2\phi' + n^2 r\phi)_{r=R_1} = 0.$$

En effet, nous avons

$$r\phi'' = -n^2 r\phi;$$

alors

$$\int_{R_1}^{R} r\phi_1\phi_2'\,dr = (r\phi_1\phi_2')_{R_1}^{R} + n_2^2\int_{R_1}^{R} r\phi_1\phi_2\,dr.$$

De la même manière,

$$\int_{R_1}^{R} r\phi_1'\phi_2'\,dr = (r\phi_1'\phi_2)_{R_1}^{R} + n_1^2\int_{R_1}^{R} r\phi_1\phi_2\,dr.$$

En multipliant la première par n_1, la seconde par n_2^2 et en les retranchant, nous obtiendrons

$$(n_1^2 - n_2^2)\int_{R_1}^{R} r\phi_1\phi_2'\,dr = (r\,n_1^2\phi_1\phi_2' - n_2\phi_2\phi_1)_{R_1}^{R}.$$

Mais, à cause des équations (A), la seconde partie s'annule pour les deux limites, d'où

$$\int_{R_1}^{R} r\Phi'_1\Phi'_2\,dr = 0.$$

Pour déterminer les constantes arbitraires, remarquons d'abord que, v étant une fonction impaire de z, $q'' = -1$.

Des équations d'équilibre sur les surfaces latérales, nous tirons

$$d = \frac{1+\mu}{E}\,\frac{R^2R_1^2(T-T_1)}{R^2-R_1^2} \quad \text{et} \quad 2a + 2\mu b_1 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)R^2T - R_1^2T_1}{E(R^2-R_1^2)}.$$

Les équations d'équilibre des forces agissant sur les plans des bases nous donnent

$$(K) \qquad P = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R} p_3 r\,dr\,d\varphi \quad \text{et} \quad M_z = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R} r^2 p_5\,dr\,d\varphi,$$

où P est la pression uniforme appliquée normalement à ces plans, et M_z le moment du couple qui produit la torsion du cylindre autour de l'axe z.

Si l'on introduit dans ces expressions les valeurs de p_3 et p_5 tirées de (3), il est aisé de voir, tenant compte des équations (10), que

$$\int_{R_1}^{R} \sum \frac{m^2}{2}\left(e^{ml} + e^{-ml}\right)\left(\varepsilon - \frac{\rho}{1-\mu}\right) r\,dr = 0$$

et

$$\int_{R_1}^{R} \sum n\left(e^{nl} + e^{-nl}\right) r^2\Phi'\,dr = 0.$$

Alors les équations (K) nous donnent

$$4\mu a + 2b(1-\mu) = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)P}{E\pi(R^2-R_1^2)}, \quad a_2 = \frac{4(1+\mu)M_z}{E\pi(R^4-R_1^4)}.$$

En remarquant que

$$2a + 2\mu b_1 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\,\frac{R^2T - R_1^2T_1}{R^2-R_1^2},$$

nous obtenons

$$a = \frac{1}{2E\pi(R^2 - R_1^2)}\left[(1-\mu)\pi(R^2T - R_1^2T_1) - \mu P\right],$$

$$b_1 = \frac{1}{2E\pi(R^2 - R_1^2)}\left[P - 2\mu\pi(R^2T - R_1^2T_1)\right].$$

Pour la détermination complète de toutes les constantes arbitraires, nos équations d'équilibre ne nous donnent plus rien. Et cela se comprend, car nous n'avons soumis à aucune condition les forces tangentielles agissant sur les bases du cylindre, soit dans la direction du rayon, soit perpendiculairement au rayon.

Si nous soumettons les forces p_6, p_5 et la dilatation cubique δ, ou mieux $\int_0^z \frac{\partial\delta}{\partial r}dz$, à la condition de devenir en fonctions données de r pour $z = l$, c'est-à-dire sur les bases du cylindre, $2l$ étant sa hauteur ; le problème sera complètement résolu.

En effet, des équations d'équilibre sur les surfaces latérales, nous avons obtenu les rapports $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{H}{G}$ des constantes arbitraires, qui entrent dans les fonctions ε et ϕ.

Si nous nous donnons encore

$$\sum m\varepsilon'(e^{ml} - e^{-ml}) = f(r),$$

$$\sum m\rho'(e^{ml} - e^{-ml}) = F(r)$$

et

$$\sum n\phi'(e^{nl} + e^{-nl}) = \rho(r) \quad (1).$$

Alors, en nous servant des formules

$$\int_{R_1}^{R} r(\rho'_1\varepsilon'_2 + \rho'_2\varepsilon'_1)\,dr = 0 \quad \text{et} \quad \int_{R_1}^{R} r\phi'_1\phi'_2\,dr = 0,$$

(1) Si l'on admet que $\int_{R}^{R} \rho'_1\varepsilon'_2 r\,dr = \int_{R_1}^{R} \rho'_2\varepsilon'_1 r\,dr = 0$, il suffit de deux conditions pour que le problème soit complètement résolu.

nous obtenons immédiatement

$$A_j = \frac{\int_{R_1}^{R} [\delta'_j f(r) + \Delta'_j F(r)] r\,dr}{2m_j(e^{m_j l} - e^{-m_j l}) \int_{R_1}^{R} \delta'_j \Delta'_j r\,dr},$$

$$G_j = \frac{\int_{R_1}^{R} \varphi(r) \gamma'_j r\,dr}{n_j(e^{n_j} + e^{-n_j}) \int_{R_1}^{R} \gamma'^2_j r\,dr},$$

ou

$$\delta'_j = \frac{\rho'_j}{A_j}, \quad \Delta'_j = \frac{\varepsilon'_j}{A_j}, \quad \gamma'_j = \frac{\Phi_j}{G_j}.$$

En introduisant les expressions obtenues dans nos formules, nous arrivons finalement aux expressions suivantes pour les déplacements :

$$u = \frac{r}{\pi E(R^2 - R_1^2)} [(1-\mu)\pi(R^2 T - R_1^2 T) - \mu P] + \frac{(1+\mu) R^2 R_1^2 (T - T_1)}{E(R^2 - R_1^2) r}$$
$$+ \sum_j \frac{\delta'_j + \Delta'_j}{4 m_j} \frac{e^{m_j z} + e^{-m_j z}}{e^{m_j l} - e^{-m_j l}} \frac{\int_{R_1}^{R} r[\delta'_j f(r) + \Delta'_j F(r)]\,dr}{\int_{R_1}^{R} \delta'_j \Delta'_j r\,dr}$$

$$v = \frac{4(1+\mu) M_z}{E\pi(R^2 - R_1^2)} rz + \sum_j \frac{\gamma'_j}{n_j} \frac{e^{n_j z} - e^{-n_j z}}{e^{n_j l} + e^{-n_j l}} \frac{\int_{R_1}^{R} \varphi(r) \gamma'_j r\,dr}{\int_{R_1}^{R} \gamma'^2_j r\,dr}$$

$$w = \frac{z}{E\pi(R^2 - R_1^2)} [P - 2\mu\pi(R^2 T - R_1^2 T_1)]$$
$$+ \sum_j \frac{\Delta_j - \delta_j}{4} \frac{e^{m_j z} - e^{-m_j z}}{e^{m_j l} - e^{-m_j l}} \frac{\int_{R_1}^{R} r[\delta'_j f(r) + \Delta'_j F(r)]\,dr}{\int_{R_1}^{R} \delta'_j \Delta'_j r\,dr}.$$

Si, dans le cas d'un cylindre plein, on pose

$$T = 0, \quad f(r) = f_1 \frac{P}{\pi R^2}\left(e^{a\frac{l}{R}} - e^{-a\frac{l}{R}}\right), \quad F(r) = f_2 \frac{P}{\pi R^2}\left(e^{a\frac{l}{R}} - e^{-a\frac{l}{R}}\right),$$

et si l'on se donne la plus grande valeur de λ_3, nous obtiendrons la formule suivante pour les dimensions du cylindre comprimé :

$$P = \frac{A\pi R^2}{1 + \sum B \left(\frac{e^{k\frac{l}{R}} + e^{-k\frac{l}{R}}}{e^{k\frac{l}{R}} - e^{-k\frac{l}{R}}} \right) \left(e^{a\frac{l}{R}} - e^{-a\frac{l}{R}} \right)}.$$

L. Gordon a donné, pour le même but, la formule empirique suivante :

$$P = \frac{A_1 \pi R^2}{1 + B \left(\frac{l}{R} \right)^2}.$$

On voit, d'après les expressions de u, v et w, que, dans le cas que nous considérons, il se passe en effet quelque chose qui rappelle les phénomènes que j'ai observés dans mes expériences sur le caoutchouc. En outre, ces expressions des déplacements nous donneront la possibilité d'obtenir des formules plus exactes pour calculer la résistance d'un vase cylindrique clos, soumis à des pressions normales, car dans ce dernier cas toute la question se réduit à la détermination des fonctions inconnues $f(r)$, $F(r)$ et $\varphi(r)$; or on pourra trouver celles-ci en considérant chaque secteur cylindrique élémentaire comme une poutre régulièrement chargée et tendue en même temps par les bases ou couvercles du vase cylindrique.

Sur la pression moyenne, en chaque point intérieur de l'espace qu'occupe un liquide agité [1];

PAR M. J. BOUSSINESQ.

La publication du Mémoire précédent d'Hydrodynamique m'offre l'occasion de faire connaître une particularité de la théorie de la houle et du clapotis que je n'avais pas encore remarquée lors de l'impression de mes Mémoires sur ces ondes, et qui présente un certain intérêt. Elle consiste dans cette loi que *les pressions produites successivement en un même point de l'espace toujours occupé par le liquide ont leur moyenne, évaluée en hauteur du fluide, inférieure à la pression qui s'y exerçait dans l'état de repos, d'une quantité égale au produit de l'inverse de la gravité g par la demi-somme de la valeur moyenne du carré des vitesses qu'on y observe et de la valeur moyenne générale, pour les points situés au même niveau que le proposé dans toute l'étendue d'une longueur d'onde et pour toute la durée d'une période, de l'excès du carré de la composante verticale de la vitesse sur le carré de sa composante horizontale.*

On le reconnaît en partant de la formule (g) de l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 350), qui, si l'on y remplace

$$P + g\frac{dv_1}{dz_1} \quad \text{par} \quad \frac{p - p_0}{\rho} - g(H - z)$$

[1] Addition à un Mémoire précédent d'Hydrodynamique, p. 273 à 300.

et le second membre par ses expressions obtenues à la page suivante 351, donne, à une deuxième approximation, la suite des pressions p supportées par une même molécule. Il suffit d'en éliminer les coordonnées x_1, z_1, qui sont celles du centre de l'orbite de la molécule, s'il s'agit d'une houle, ou de sa situation de repos, s'il s'agit d'un clapotis, pour y introduire, à la place, les coordonnées actuelles de la molécule,

$$x = x_1 + \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \quad z = z_1 + \frac{d\varphi_1}{dz_1},$$

où φ_1 a l'une des expressions (e) et (e') (p. 349). Comme on se borne aux termes du second ordre de petitesse par rapport à la demi-hauteur des ondes, x_1, z_1 peuvent être remplacés par x, z dans toutes les parties de φ_1 et de ses dérivées qui sont déjà de cet ordre, et il n'y a que le premier terme de $\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$, identique à celui de $-k'^2\varphi_1$, où il faille tenir compte des petites différences $x_1 - x$, $z_1 - z$, en y mettant, au lieu de $-k'^2\varphi_1(x_1, z_1)$, le développement

$$-k'^2\varphi_1(x, z) - k'^2\left[\frac{d\varphi_1}{dx}(x_1 - x) + \frac{d\varphi_1}{dz}(z_1 - z)\right]$$

ou

$$-k'^2\varphi_1(x, z) + k'^2\left(\frac{d\varphi_1^2}{dx^2} + \frac{d\varphi_1^2}{dz^2}\right).$$

Cela donne simplement, pour l'expression de $\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$, ce qu'elle devient quand on y substitue x, z à x_1, z_1, plus le terme du second ordre

$$k'^2\left(\frac{d\varphi_1^2}{dx^2} + \frac{d\varphi_1^2}{dz^2}\right).$$

Le calcul de la valeur moyenne de p n'offre ensuite aucune difficulté, non plus que le calcul des valeurs moyennes des carrés des deux composantes, horizontale u et verticale w, de la vitesse au point (x, z), ni celui des moyennes (que j'appellerai *générales*) de ces valeurs moyennes quand x varie. Si l'on observe enfin que, d'après les formules (f') et (i) (p. 350 et 351), la profondeur à l'état de repos est $H - \frac{A^2k'^2}{2g}$ dans

le cas d'une houle, H dans celui d'un clapotis, on trouvera, dans les deux cas, pour l'excédent, évalué en hauteur du fluide, de la pression moyenne au point (x, z) intérieur (ou supposé toujours recouvert par le liquide), sur la pression qui s'y exerçait dans l'état de repos.

$$(1) \qquad -\frac{1}{2g}\left[\text{moy.}(u^2+w^2) - \text{moy. génér.}(u^2-w^2)\right];$$

ce qui démontre la loi énoncée.

L'expression (1) se simplifie et *devient essentiellement négative*, quand les mêmes circonstances se produisent successivement en tous les points situés à un même niveau z, c'est-à-dire quand il s'agit d'une houle. Alors les moyennes générales (ou pour toutes les valeurs de x) de u^2 et de w^2 ne diffèrent pas de leurs moyennes relatives au point unique (x, z); et il vient, au lieu de (1), $-\frac{\text{moy. } w^2}{g}$. Ainsi, *dans une houle, la pression exercée en un point quelconque de l'espace qu'occupe constamment le liquide est diminuée en moyenne, par le fait du mouvement, d'une quantité égale, en hauteur du fluide, au carré moyen de la composante verticale de la vitesse dans la région considérée, divisé par la gravité g.*

Il est digne de remarque qu'une loi analogue, mise en vue depuis longtemps par des observations de M. de Caligny, mais où paraît la vitesse totale au lieu de sa composante verticale, s'applique au simple mouvement oscillatoire, calculé déjà par Newton, d'une colonne liquide dans un siphon renversé (ou tube en U) bien calibré. Appelons-y, en effet : 1° $2l$ la longueur invariable de la colonne oscillante, et s une abscisse courbe, comptée le long de l'axe du tube à partir de la position d'équilibre du milieu de la colonne; 2° α l'abscisse s, à l'époque t, de ce point milieu, dont l'accélération tangentielle $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ sera évidemment celle de toute la colonne; 3° p_0 la pression atmosphérique s'exerçant aux extrémités, c'est-à-dire sur les deux surfaces libres, dont les abscisses respectives seront $\alpha - l$ et $\alpha + l$; 4° Z l'ordonnée verticale z (comptée de bas en haut) de leur situation d'équilibre, et $Z - \alpha\cos\beta_0$, $Z + \alpha\cos\beta_1$ leurs ordonnées effectives z à l'époque t ou β_0, β_1, les angles, supposés constants, que l'axe du tube y fait avec la verticale. L'équation fondamentale de l'Hydrodynamique donnera évidem-

ment

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = -g\frac{dz}{ds} - \frac{d^2\alpha}{dt^2};$$

d'où, en multipliant par ds, puis intégrant à partir de $s = \alpha - l$,

$$(2) \qquad \frac{p - p_0}{\rho} = g(Z - \alpha\cos\beta_0 - z) - \frac{d^2\alpha}{dt^2}(s - \alpha + l),$$

et, si l'on fait $s = \alpha + l$, $z = Z + \alpha\cos\beta_1$, $p = p_0$,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{\cos\beta_0 - \cos\beta_1}{2}\frac{g}{l}\alpha = 0.$$

Or cette équation différentielle en α montre que le mouvement est pendulaire, et que α, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ ont leurs moyennes nulles. Donc l'excédent $\frac{p - p_0}{\rho} - g(Z - z)$, égal en moyenne d'après (2), pour une valeur donnée de s, à $\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2\alpha^2}{dt^2} - \frac{d\alpha^2}{dt^2}$, se réduit bien, toujours en moyenne, au carré, changé de signe, de la vitesse $\frac{d\alpha}{dt}$, vu que le terme $\frac{1}{2}\frac{d^2\alpha^2}{dt^2}$ a sa fonction primitive, $\frac{1}{2}\frac{d\alpha^2}{dt}$, périodique, et, par conséquent, sa valeur moyenne nulle.

M. de Caligny, en établissant une communication à travers la paroi verticale qui séparait un petit réservoir d'avec un canal découvert, a observé effectivement une baisse sensible dans ce réservoir (où l'agitation se trouvait très réduite), quand une houle assez forte se propageait le long du canal. C'est ce qu'on peut voir dans ses *Recherches sur les oscillations de l'eau, etc.* (Paris, Baudry, édit. 1883), au bas de la page 297, à la suite de la description d'une houle artificielle, produite dans le canal dont il s'agit, qu'il a observée en commun avec M. Bertin, et qui, malgré le peu de longueur du canal, ne permettant guère aux mouvements de se bien régulariser, a présenté sensiblement les caractères assignés par la théorie quand on tient compte des frottements (*Eaux courantes*, p. 334, et *Additions*, p. 23). Par exemple, la demi-durée T des oscillations, accrue par les frottements, y était $0^s,5$, alors que, sans eux, elle aurait dû égaler seulement $0^s,4705$, vu la demi-longueur $L = 0^m,65$ des ondes et la profondeur d'eau $H = 0^m,36$; le rapport des

dimensions horizontales des orbites au fond et à la surface était 0,36 environ, au lieu de la valeur théorique (où sont abstraits les frottements) 0,3406. Enfin, le rapport de l'axe vertical des orbites à leur axe horizontal, qui aurait dû croître, dans un liquide parfait, depuis zéro jusqu'à 0,9402 du fond à la surface, paraissait atteindre sur cette dernière la valeur 1,09, sensiblement plus forte que 0,94, conformément aux prévisions théoriques touchant l'effet des frottements.

La réduction de l'expression (1) à $-\frac{\text{moy. } w^2}{g}$ ne s'appliquerait plus seulement au cas d'une houle, mais s'étendrait à celui d'un clapotis et serait, par conséquent, aussi générale que la formule (1) elle-même, si, au lieu de la pression moyenne en un seul point intérieur (x, z), on voulait considérer la moyenne de ses valeurs en tous les points situés au même niveau dans l'étendue d'une longueur d'onde. Alors, en effet, on aurait à prendre ce que nous appelons la valeur moyenne générale du second membre de (1) pour un certain niveau z, et l'excédent de la pression moyenne effective en tous ces points sur la pression de l'état d'équilibre égalerait $-\frac{\text{moy. gén. } w^2}{g}$ [1].

---

[1] Je profite aussi de l'occasion de ce Mémoire, destiné à compléter une partie de mon *Essai sur la théorie des eaux courantes*, pour préciser quelques idées émises, dans le même *Essai*, au sujet d'une autre question, savoir : la *Résistance des coudes*. Le second cas que j'y ai abordé (p. 598) est celui d'un tournant dans un canal découvert d'une profondeur très petite par rapport à sa largeur. Les filets fluides y sont beaucoup moins solidaires les uns des autres que dans un tuyau étroit, à cause même de cette plus grande largeur relative; car les premiers qui se heurtent contre le bord extérieur ou concave peuvent y augmenter un peu de hauteur sans faire naître, à la surface, des pentes transversales sensibles et, par suite, sans refouler brusquement les autres filets. Donc, si le petit angle β du tournant atteint, comme il arrive en général, des valeurs suffisantes pour que la section contractée se produise, en aval du coude, à une distance λ modérée, seulement comparable, par exemple, à la largeur a : 1° les filets fluides contigus au bord intérieur ou convexe conserveront à fort peu près, jusqu'à la section contractée, leur direction première (ce qui permettra, comme on voit p. 599, de déduire de λ une valeur approchée de la contraction $1-m$, valeur par excès vu qu'on y attribue à la partie *morte* des sections autant de hauteur qu'à la partie *vive* et une largeur un peu trop forte); 2° les filets dont il s'agit garderont aussi, jusqu'au passage du coude et au delà, leur hauteur primitive, tandis que les filets

contigus au bord extérieur ou concave, retardés par le coude, se gonfleront déjà à quelque distance en amont de celui-ci. Donc, le canal d'amont exercera, en somme, sur le fluide, par son bord extérieur, un excès non hydrostatique $\mathfrak{P}$ de pression, ayant une composante sensible suivant le sens de l'écoulement dans le canal d'aval, contrairement à ce qui serait arrivé si, la solidarité des filets fluides étant aussi grande que dans un tuyau circulaire coudé, le gonflement s'était trouvé, dans le canal d'amont, presque pareil sur les deux rives et sur toute la largeur. C'est pourquoi les raisonnements des n^{os} **223** et **224** (p. 608 à 610), qui démontrent en général l'inégalité $\frac{1}{m} - 1 < 2 \sin \frac{\beta}{2}$ $\left[\text{comme conséquence de celle-ci, } \mathfrak{P} > 0, \text{ et par la comparaison des formules } (q), (q^{\text{IV}})\right]$, ne permettent pas de la changer en une égalité approchée dans le cas d'un canal large. Il en est, du reste, de même dans le cas d'un tuyau coudé à section circulaire, quand le coude a son angle β assez grand pour que les filets fluides prennent des courbures considérables au moment d'y arriver ; ainsi, une expérience de Venturi, sur la perte de charge par un coude à angle droit, a donné, pour $\beta = 90^\circ$, $\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 = 1{,}5$ (environ) au lieu de $(2 \sin 45^\circ)^2$ ou 2 ; et, dans d'autres cas, où le second côté du coude était peut-être moins court, Péclet n'a même trouvé que 1 environ ou $\sin^2 \beta$, pour ce nombre, comme je le dis p. 607. Cette valeur approximative 1 résulte aussi d'une expérience de M. de Caligny (mêmes *Recherches*, p. 539) faite sur l'écoulement de l'eau comme celle de Venturi, mais (observe l'auteur) dans un coude dont le second côté avait probablement une longueur moins réduite.

Je remarquerai encore (p. 601 et 602) que le coefficient, probablement inférieur à l'unité, introduit dans l'expression de la perte de charge par le fait de l'arrondissement complet de l'axe du canal, est peut-être fonction du rapport de la largeur a à la profondeur h ; ce qui, du reste, ne change rien aux résultats suivants. Enfin, j'observerai, à propos de la formule des profondeurs de la Garonne (p. 615), qu'un nouveau Mémoire de M. Fargue (*Étude sur la largeur du lit moyen de la Garonne*, § Ier, p. 4, au numéro d'octobre 1882 des *Annales des Ponts et Chaussées*) conduit à y prendre $a = \frac{1}{2}(180 + 200) = 190^{\text{m}}$ au lieu de $a = \frac{1}{2}(170 + 190) = 180^{\text{m}}$, et, par suite, pour que le produit $h_0 \sqrt{a}$ reste le même, à poser $h_0 = 8^{\text{m}} \frac{3}{4}$ au lieu de 9^{m} ; ce qui est encore plus conforme aux données de l'observation, car la valeur $h_0 = 9^{\text{m}}$ paraissait un peu forte.

M. Fargue indique, dans ce nouveau travail, la manière d'obtenir un approfondissement suffisant de certains *maigres*, où la largeur est trop grande, en l'y réduisant au moyen de digues longitudinales. Pour celui de la Garonne qui est appelé *Passe de Mondiet*, où la largeur était de 204^{m}, alors qu'elle n'atteignait respectivement que 170^{m} et 176^{m} dans les deux coudes d'amont et d'aval, il a pu rendre permanent un accroissement de la profondeur égal à $2^{\text{m}},20 - 0^{\text{m}},90 = 1^{\text{m}},30$ (p. 8 et 9) en y réduisant cette largeur à 165^{m}. Si, vu la difficulté d'apprécier ce que pouvait être la largeur a de la section vive, dans l'état primitif où la rivière

y faisait *ventre,* on prend pour a la moyenne entre la largeur totale effective. 204, et sa valeur (173 environ) dans les coudes d'amont et d'aval. ce qui donne $a = 188,5$, les principes exposés aux mêmes n°s 222 et 226 de mon *Essai* (p. 605 et 613) permettront d'évaluer cet approfondissement. En effet, a' désignant la nouvelle largeur, 165^m, et h la nouvelle profondeur en hautes eaux (alors que la profondeur primitive h_0 était $8^m\frac{3}{4}$), ils conduiront, d'une part, à prendre la différence $h - h_0$ comme expression approchée de l'approfondissement permanent, et, d'autre part, à poser $ah_0 = a'h$ ou $h - h_0 = \frac{a - a'}{a'} h_0$. Dans le cas présent, il vient ainsi $h - h_0 = \frac{188,5 - 165}{165} \times 8^m\frac{3}{4} = 1^m,25$, résultat bien d'accord avec celui, $1^m,30$, de l'observation.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME SÉRIE. — TOME IX.

Pages.

Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce; par M. *Appell* 5

Exposé des principes de la théorie des courants électriques; par M. *H. Resal* 25

Des bissectrices d'un réseau de lignes tracées sur une surface quelconque; par M. l'abbé *Aoust* 43

Commentaire à la théorie mathématique du jeu de billard; par M. *H. Resal*. 65

Mémoire sur la théorie des équations numériques; par M. *Laguerre* 99

Étude sur les lois de la résistance de l'air; par M. *E. Vallier* 147

Du magnétisme statique; par M. *H. Resal* 195

Note sur le profil des lames du dynamomètre de Poncelet; par M. *H. Léauté*. 245

Des enveloppes des courbes dans l'espace; par M. *Collet* 257

Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure analogue à celle de Mac-Laurin; par M. *M.-V. Vanecek* 269

Équations des petits mouvements d'un liquide pesant, quand ils sont principalement horizontaux, que les frottements s'y trouvent peu sensibles, et que le liquide est contenu soit dans un bassin à fond presque horizontal, soit dans un tuyau ou un canal de peu de pente longitudinale, la surface supérieure, soumise à des pressions constantes ou légèrement variables, n'ayant aussi que des pentes faibles; par M. *J. Boussinesq* 273

Pages.

Exposé des méthodes en Mathématiques, d'après Wronski (suite); par M. *E. West* 301

Sur l'équilibre d'un cylindre élastique; par M. *Schiff* 407

Sur la pression moyenne, en chaque point intérieur de l'espace qu'occupe un liquide agité; par M. *J. Boussinesq* 425

FIN DU TOME IX DE LA TROISIÈME SÉRIE.

8415 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
1
J684
sér.3
t.9

Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY